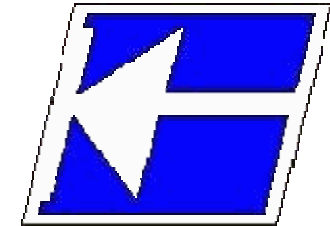


Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Departamento de Eletrônica
Retificadores



Operações Matemáticas com Números Complexos

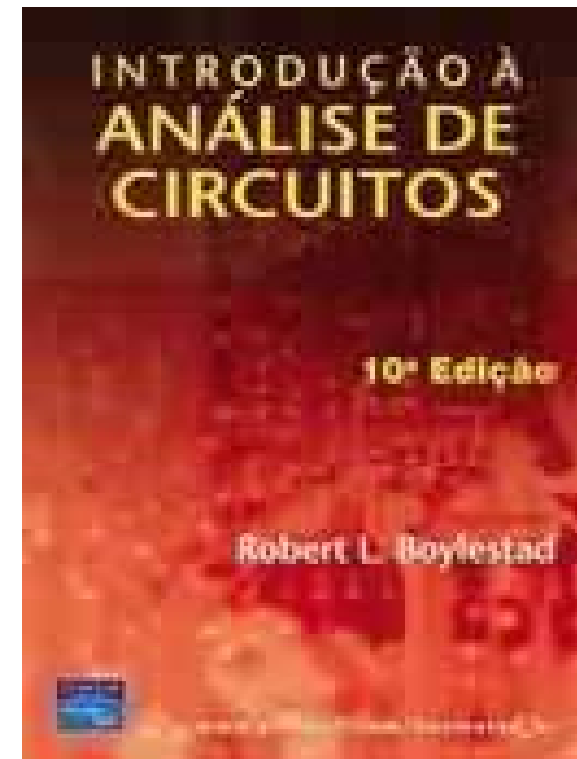
Prof. Clóvis Antônio Petry.

Florianópolis, agosto de 2007.

Bibliografia para esta aula

Capítulo 14: Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Operações com números complexos.



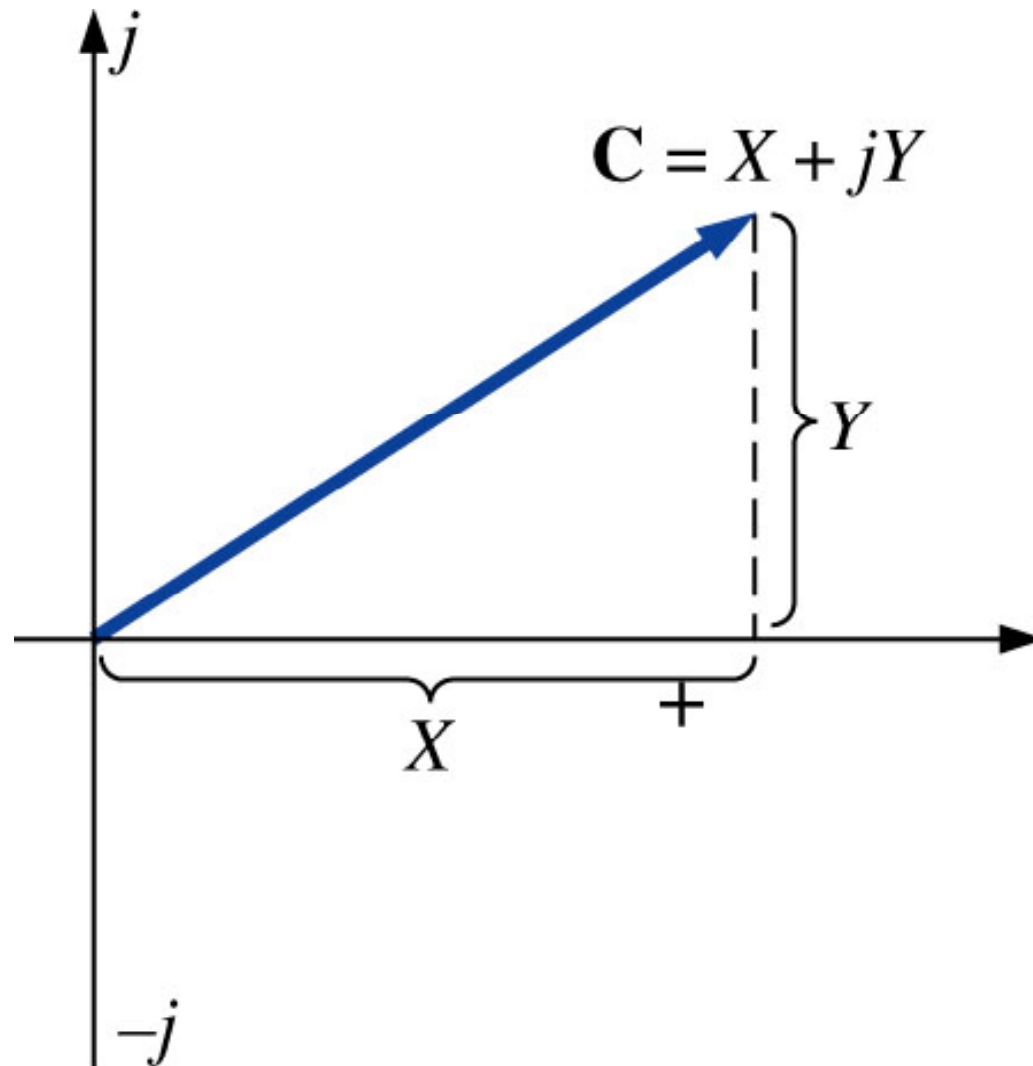
Nesta aula

Seqüência de conteúdos:

1. Revisão;
2. Complexo conjugado;
3. Inverso;
4. Adição e subtração;
5. Multiplicação e divisão.

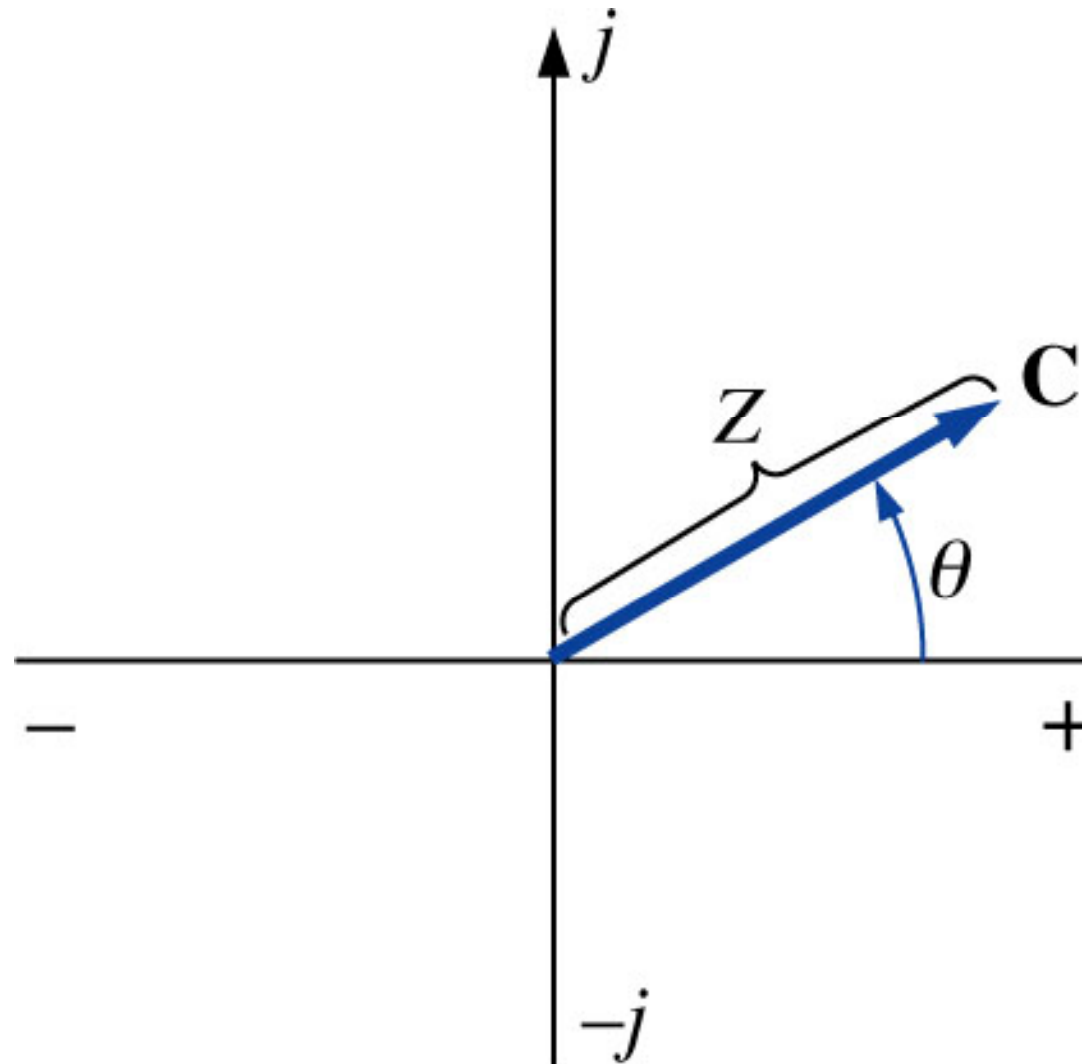
Forma retangular

$$C = X + j \cdot Y$$



Forma polar

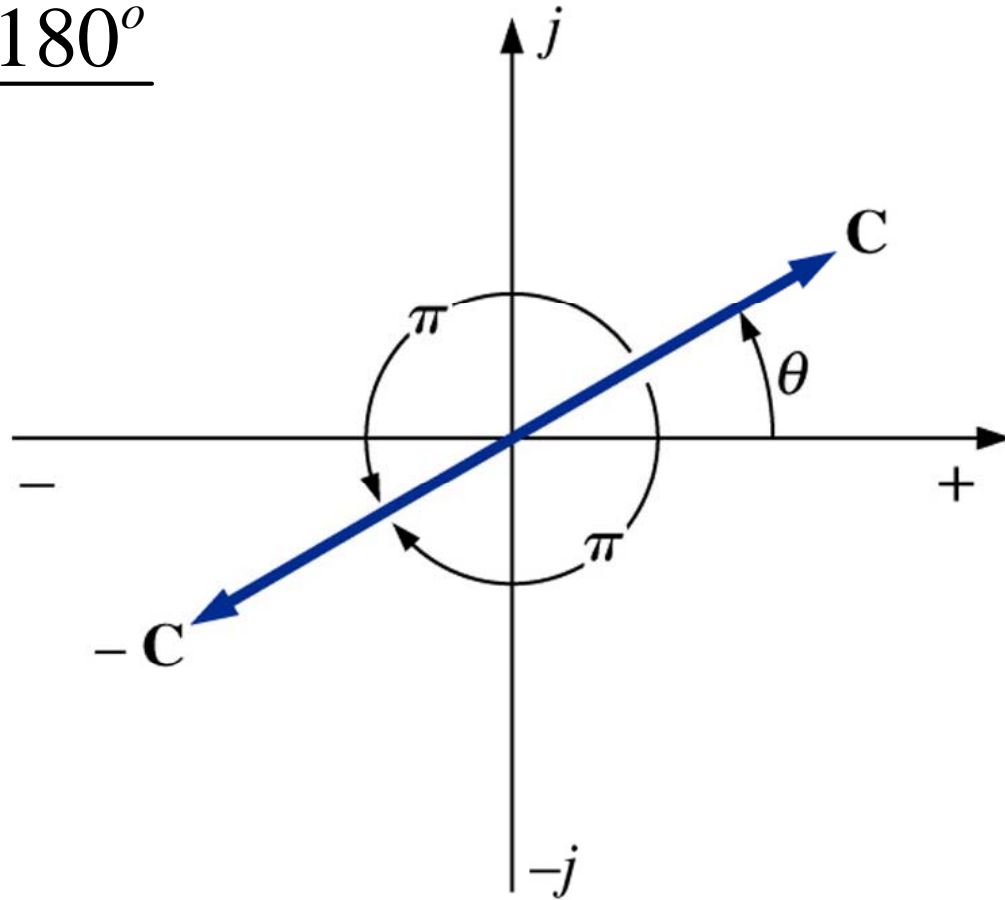
$$C = Z \angle \theta$$



Forma polar

Efeito do sinal negativo:

$$-C = -Z|\theta = Z|\theta \pm 180^\circ$$



Conversão entre formas

Retangular para polar

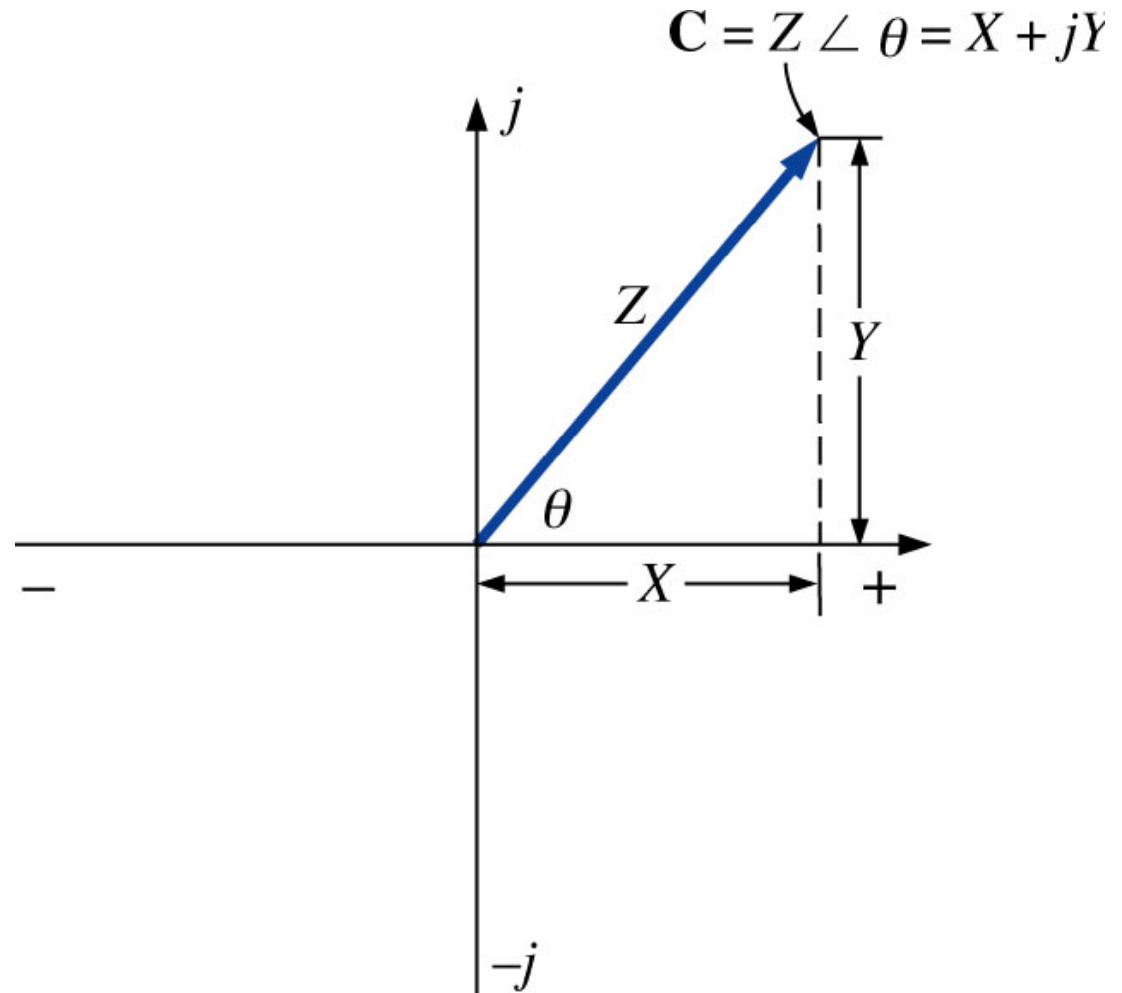
$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Polar para retangular

$$X = Z \cdot \cos(\theta)$$

$$Y = Z \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$



Operações com o j

Por definição:

$$j = \sqrt{-1}$$

Daí:

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\frac{1}{j} = \left(\frac{1}{j}\right) \cdot \left(\frac{j}{j}\right) = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Complexo conjugado

Complexo conjugado ou conjugado, na forma retangular:

$$C = 2 + j3$$

$$C^* = 2 - j3$$



Troca de sinal

Complexo conjugado ou conjugado, na forma polar:

$$C = 2 \angle 30^\circ$$

$$C^* = 2 \angle -30^\circ$$



Troca de sinal

Inverso ou recíproco

Considere o número complexo, na forma retangular:

$$C = X + jY$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{X + jY} = (X + jY)^{-1}$$

Considere o número complexo, na forma polar:

$$C = Z \angle \theta$$

$$\frac{1}{C} = C^{-1} = \frac{1}{Z \angle \theta} = (Z \angle \theta)^{-1}$$

Adição de números complexos

A adição de números complexos é realizada facilmente na forma retangular:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 + C_2 = (\pm X_1 \pm jY_1) + (\pm X_2 \pm jY_2)$$

$$C_1 + C_2 = (X_1 + X_2) + J(Y_1 + Y_2)$$

Exemplo 14.19: Adicione os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 2 + j4$ e $C_2 = 3 + j1$

b) $C_1 = 3 + j6$ e $C_2 = -6 + j3$

Subtração de números complexos

A subtração de números complexos é realizada facilmente na **forma retangular**:

$$C_1 = \pm X_1 \pm jY_1 \quad C_2 = \pm X_2 \pm jY_2$$

$$C_1 - C_2 = (\pm X_1 \pm jY_1) - (\pm X_2 \pm jY_2)$$

$$C_1 - C_2 = (X_1 - X_2) + J(Y_1 - Y_2)$$

Exemplo 14.20: Subtraia os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 4 + j6$ e $C_2 = 1 + j4$

b) $C_1 = 3 + j3$ e $C_2 = -2 + j5$

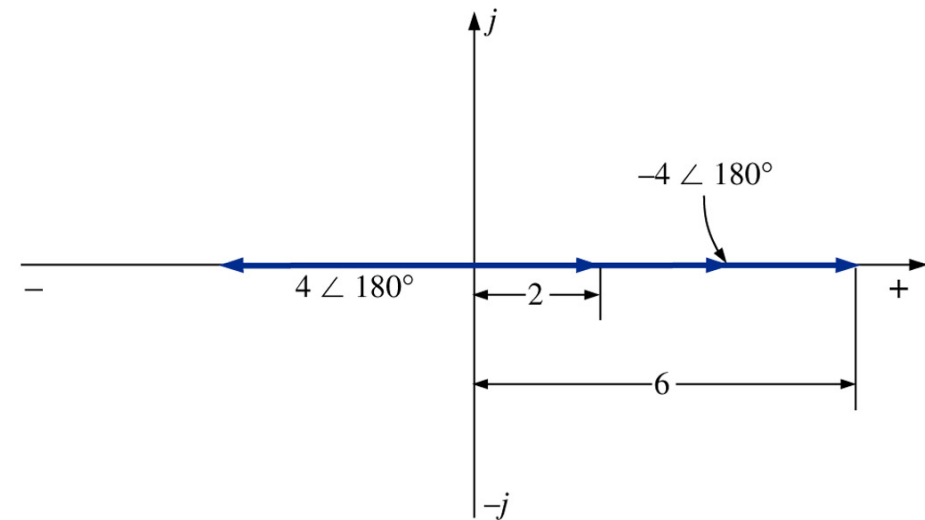
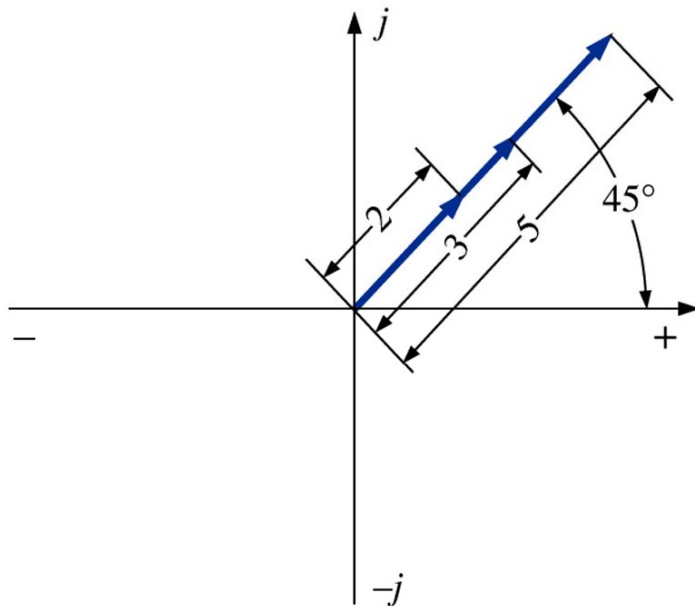
Adição e subtração de números complexos

A adição e a subtração não podem ser realizadas na forma polar, a menos que os números complexos tenham o mesmo ângulo θ ou que sua diferença seja um múltiplo de 180° .

Exemplo 14.21: Adicione os seguintes números complexos:

$$\text{a) } 2\angle 45^\circ + 3\angle 45^\circ = 5\angle 45^\circ$$

$$\text{b) } 2\angle 0^\circ - 4\angle 180^\circ = 6\angle 0^\circ$$



Multiplicação de números complexos

A multiplicação de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \qquad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$

$$C_1 \cdot C_2 = \left(Z_1 \angle \theta_1 \right) \cdot \left(Z_2 \angle \theta_2 \right)$$

$$C_1 \cdot C_2 = Z_1 \cdot Z_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

Exemplo 14.23: Multiplique os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 5 \angle 20^\circ$ e $C_2 = 10 \angle 30^\circ$

b) $C_1 = 2 \angle -40^\circ$ e $C_2 = 7 \angle 120^\circ$

Divisão de números complexos

A divisão de números complexos é realizada facilmente na **forma polar**:

$$C_1 = Z_1 \angle \theta_1 \qquad C_2 = Z_2 \angle \theta_2$$
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1 \angle \theta_1}{Z_2 \angle \theta_2} \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

Exemplo 14.25: Divida os seguintes números complexos:

a) $C_1 = 15 \angle 10^\circ$ e $C_2 = 2 \angle 7^\circ$

b) $C_1 = 8 \angle 120^\circ$ e $C_2 = 16 \angle -50^\circ$

Multiplicação e divisão de números complexos

A multiplicação e a divisão podem ser realizadas com números complexos na forma retangular, mas, no caso da divisão esta operação se torna bastante trabalhosa.

Exemplo 14.22 e 14.24: Multiplique e divida os seguintes números complexos:

a) $(2 + j3) \cdot (5 + j10)$

a) $(1 + j4) / (4 + j5)$

b) $(-2 - j3) \cdot (4 - j6)$

b) $(-4 - j8) / (6 - j1)$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$C_1 = X_1 + jY_1 \quad \text{e} \quad C_2 = X_2 + jY_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{C_2^*}{C_2^*} = \frac{(X_1 + jY_1) \cdot (X_2 - jY_2)}{(X_2 + jY_2) \cdot (X_2 - jY_2)}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(X_1X_2 + Y_1Y_2) + j(X_2Y_1 - X_1Y_2)}{X_2^2 + Y_2^2}$$

Na próxima aula

Capítulo 14: Os Dispositivos Básicos e os Fasores

1. Fasores.

