

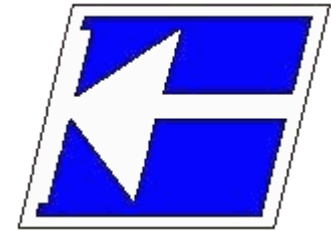
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina



Departamento Acadêmico de Eletrônica

CST em Eletrônica Industrial

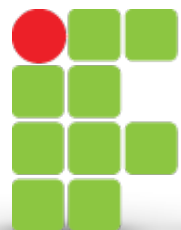
Circuitos Elétricos I



Teoremas para Análise de Circuitos

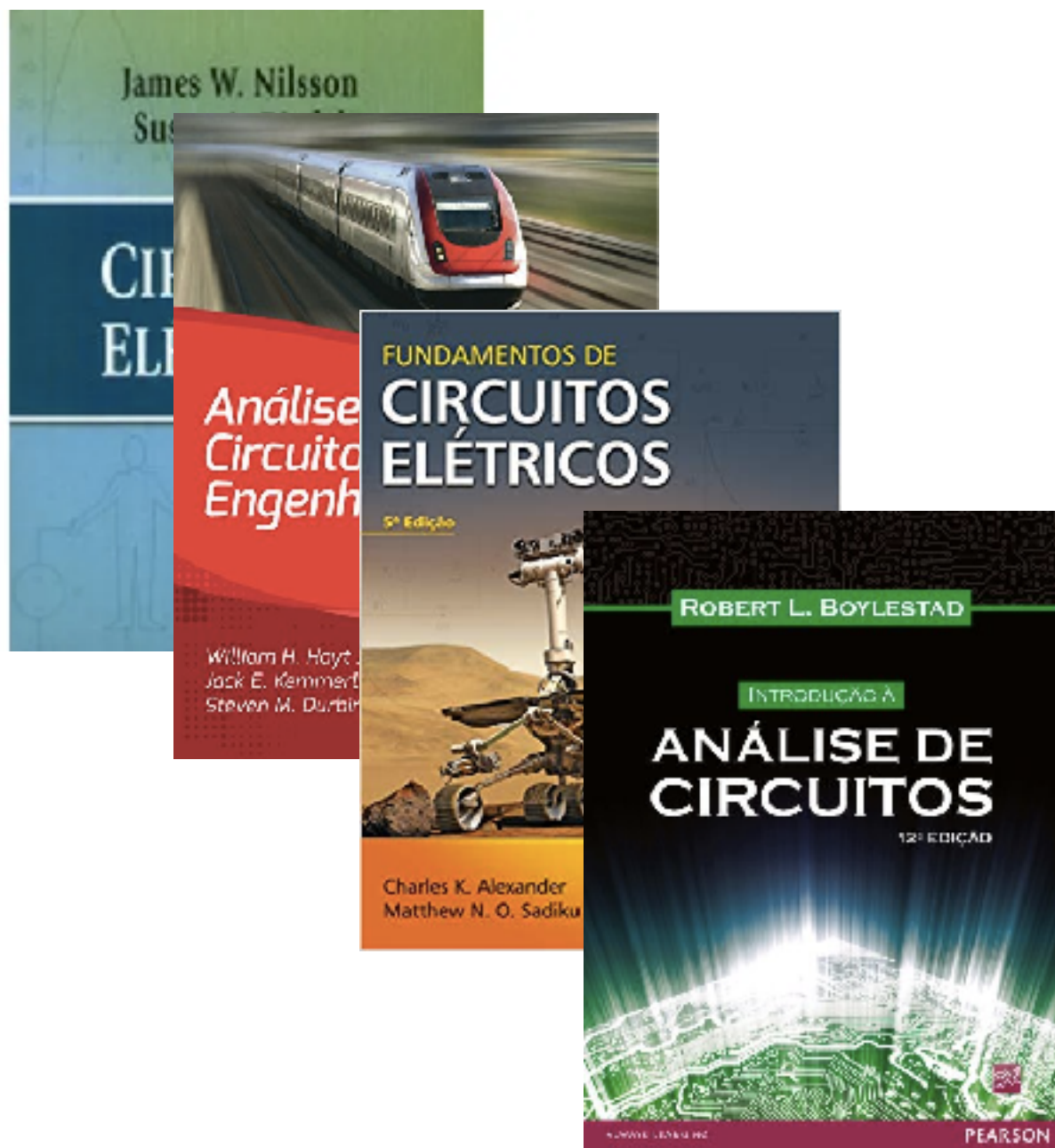
Prof. Clovis Antonio Petry.

Florianópolis, maio de 2020.

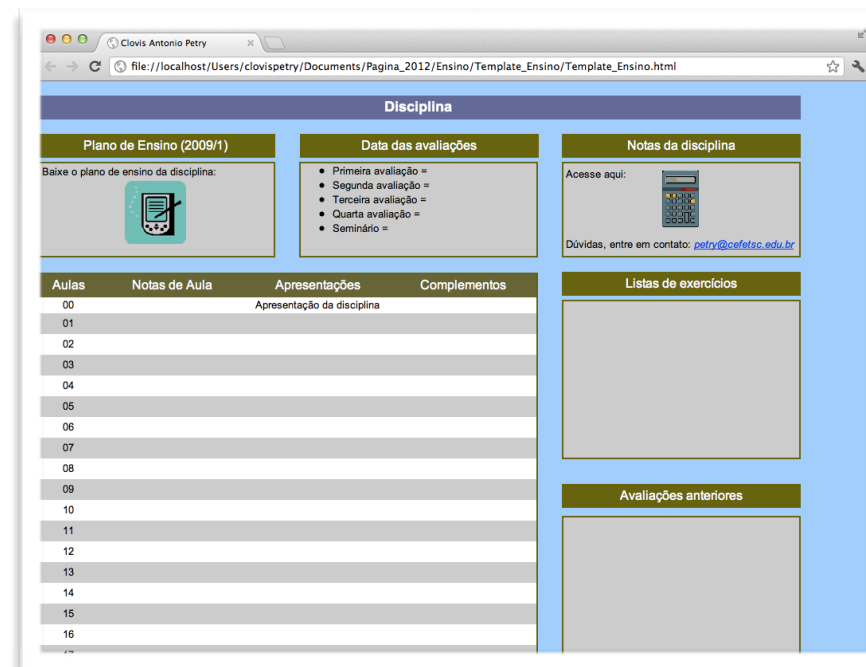


INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

Biografia para Esta Aula



www.ProfessorPetry.com.br



Nesta Aula

Introdução

Teorema da superposição

Teorema de Thévenin

Teorema de Norton

Teorema da máxima transferência de potência

Teorema de Millman

Teorema da substituição

Teorema da reciprocidade

Introdução

Objetivos de estudar teoremas para análise de circuitos:

- Familiarizar-se com o teorema da superposição e sua capacidade única de isolar o efeito de cada fonte sobre a grandeza de interesse.
- Ser capaz de aplicar o teorema de Thévenin para reduzir qualquer circuito em série-paralelo de dois terminais com qualquer número de fontes a uma única fonte de tensão e um resistor em série.
- Familiarizar-se com o teorema de Norton e com o modo com que ele pode ser usado para reduzir qualquer circuito em série-paralelo de dois terminais com qualquer número de fontes a uma única fonte de corrente e um resistor em paralelo.
- Compreender como aplicar o teorema da máxima transferência de potência para uma carga e escolher uma carga que receba a máxima potência.
- Tornar-se consciente dos poderes de redução do teorema de Millman e das poderosas implicações dos teoremas da substituição e da reciprocidade.

Teorema da Superposição

Superposição:

- O teorema da superposição é inquestionavelmente um dos mais poderosos nesse campo.
- Ele tem uma aplicação tão ampla que as pessoas frequentemente o aplicam sem perceber que suas manobras são válidas apenas por causa desse teorema.
- Em geral, o teorema pode ser usado para fazer o seguinte:
 - Analisar circuitos como os introduzidos no capítulo anterior que tenham duas ou mais fontes que não estejam em série ou em paralelo.
 - Revelar o efeito de cada fonte sobre uma quantidade em particular de interesse.
 - Para fontes de diferentes tipos (como CC e CA , que afetam os parâmetros do circuito de uma maneira diferente) e para aplicar uma análise em separado para cada tipo, tendo como resultado total simplesmente a soma algébrica dos resultados.

Teorema da Superposição

Superposição:

- O teorema da superposição declara o seguinte:
 - A corrente, ou tensão, através de qualquer elemento é igual à soma algébrica das correntes ou tensões produzidas independentemente por cada fonte.

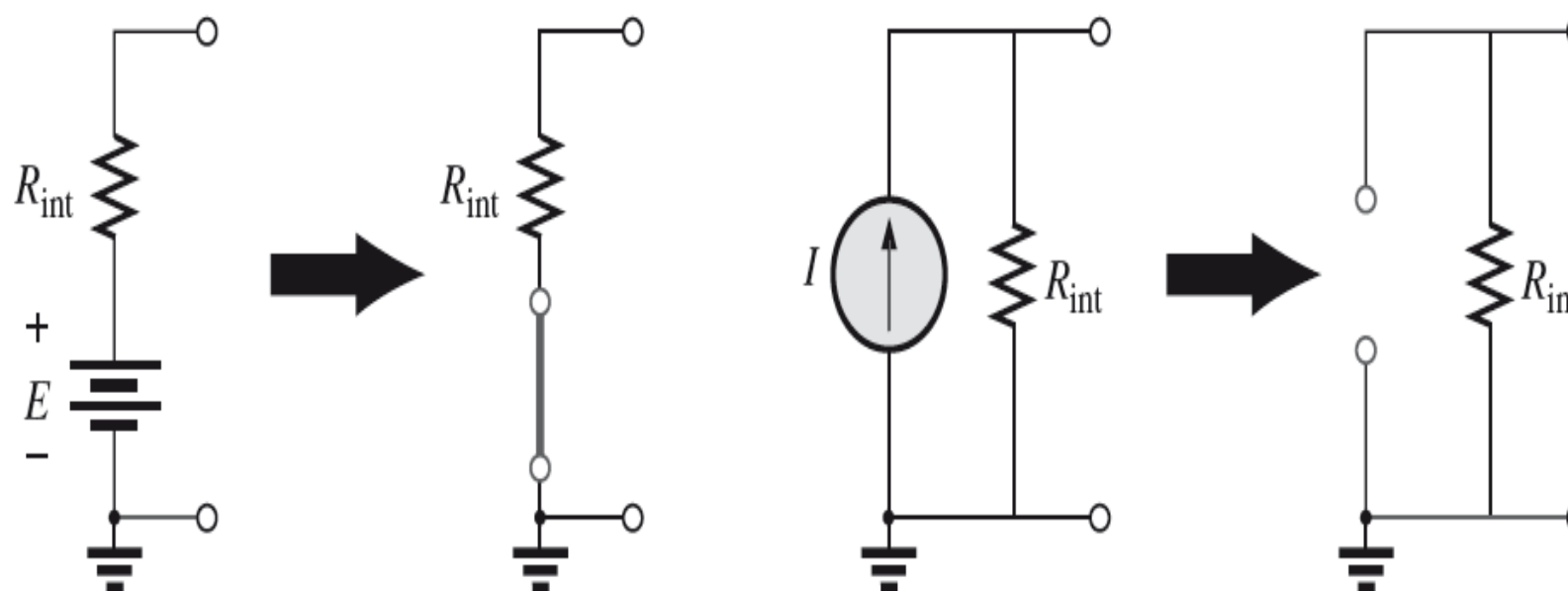


Figura 9.1 Remoção de uma fonte de tensão e de uma fonte de corrente para permitir a aplicação do teorema da superposição.

Teorema da Superposição

Superposição.

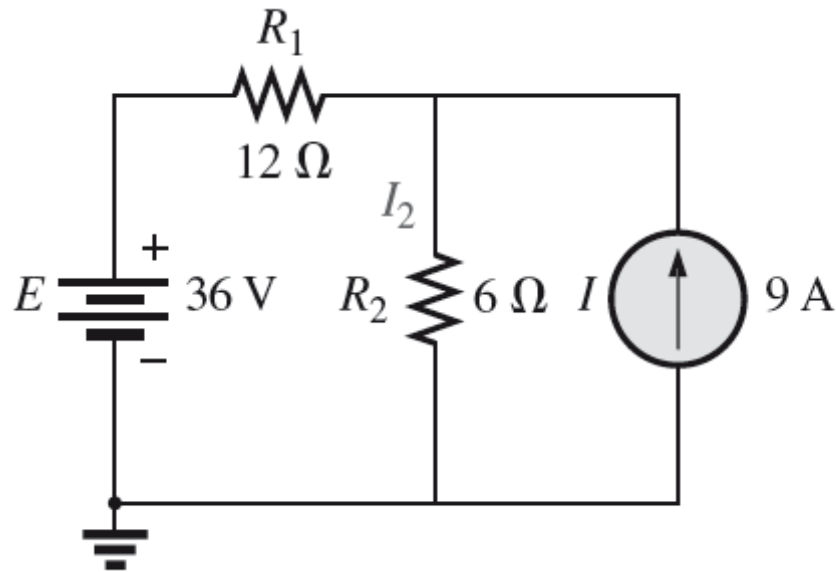


Figura 9.2 Circuito a ser analisado no Exemplo 9.1 usando o teorema da superposição.

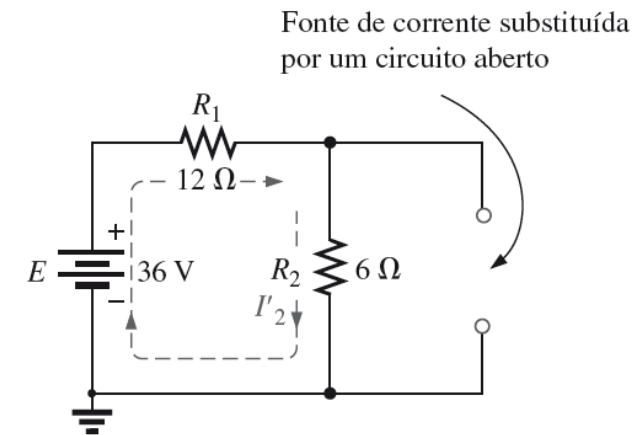


Figura 9.3 Substituição da fonte de corrente de 9 A na Figura 9.2 por um circuito aberto para determinar o efeito da fonte de tensão de 36 V sobre a corrente I_2 .

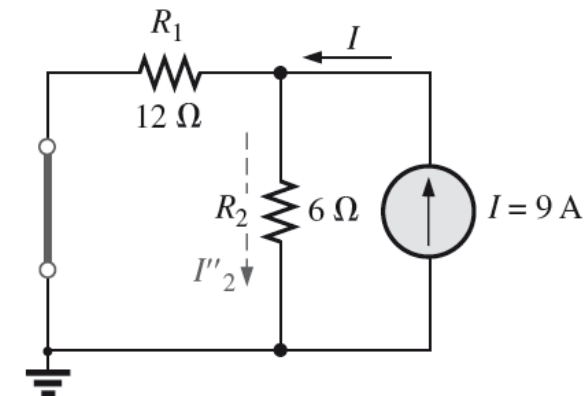


Figura 9.4 Substituição da fonte de tensão de 36 V por um equivalente de curto-circuito para determinar o efeito da fonte de corrente de 9 A sobre a corrente I_2 .

Teorema da Superposição

Superposição.

$$I_2' = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{36}{12 + 6} = 2 A$$

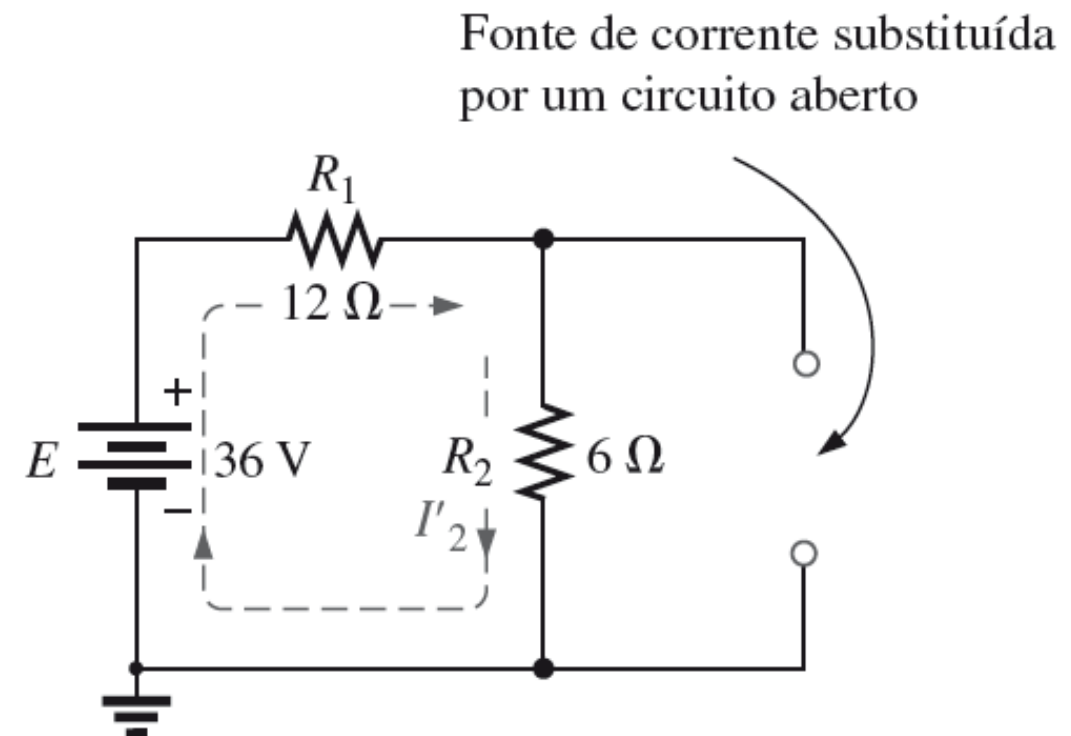


Figura 9.3 Substituição da fonte de corrente de 9 A na Figura 9.2 por um circuito aberto para determinar o efeito da fonte de tensão de 36 V sobre a corrente I_2 .

Teorema da Superposição

Superposição.

$$I_2'' = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9 \cdot \frac{12}{12 + 6} = 6 A$$

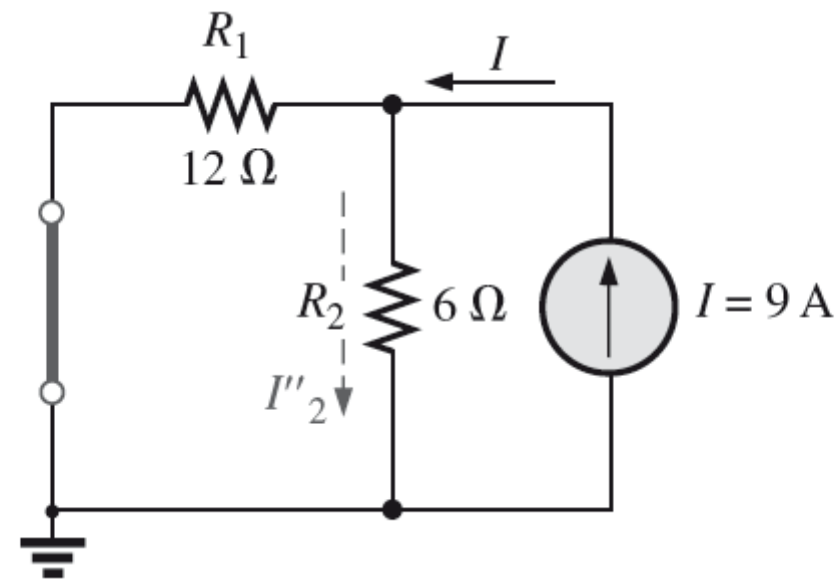


Figura 9.4 Substituição da fonte de tensão de 36 V por um equivalente de curto-circuito para determinar o efeito da fonte de corrente de 9 A sobre a corrente I_2 .

Teorema da Superposição

Superposição.

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 2 + 6 = 8 A$$

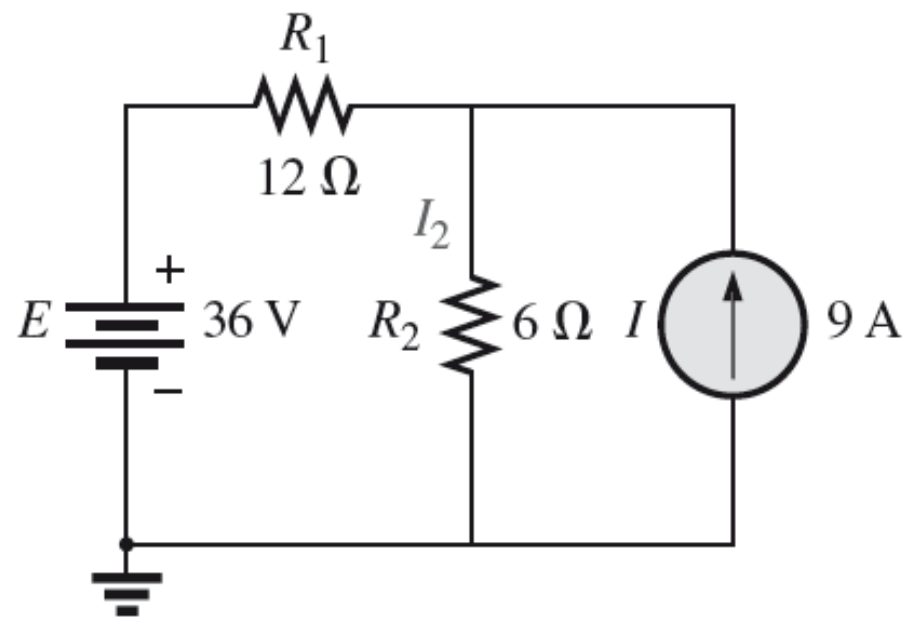


Figura 9.2 Circuito a ser analisado no Exemplo 9.1 usando o teorema da superposição.

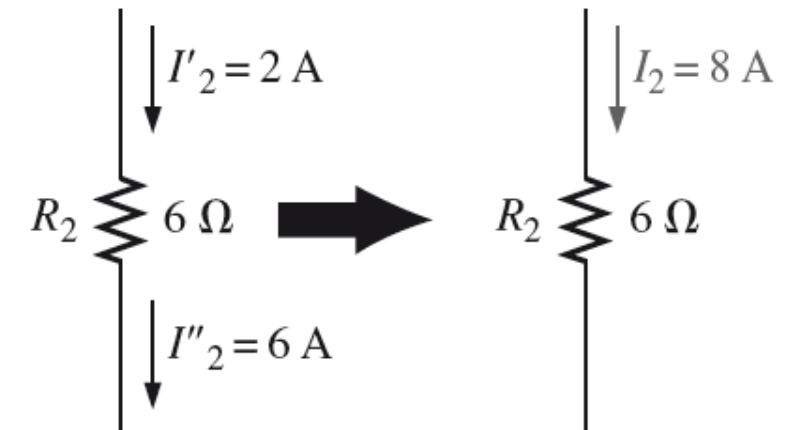


Figura 9.5 Uso dos resultados das figuras 9.3 e 9.4 para determinar a corrente I_2 para o circuito na Figura 9.2.

Teorema da Superposição

Circuito a ser analisado.

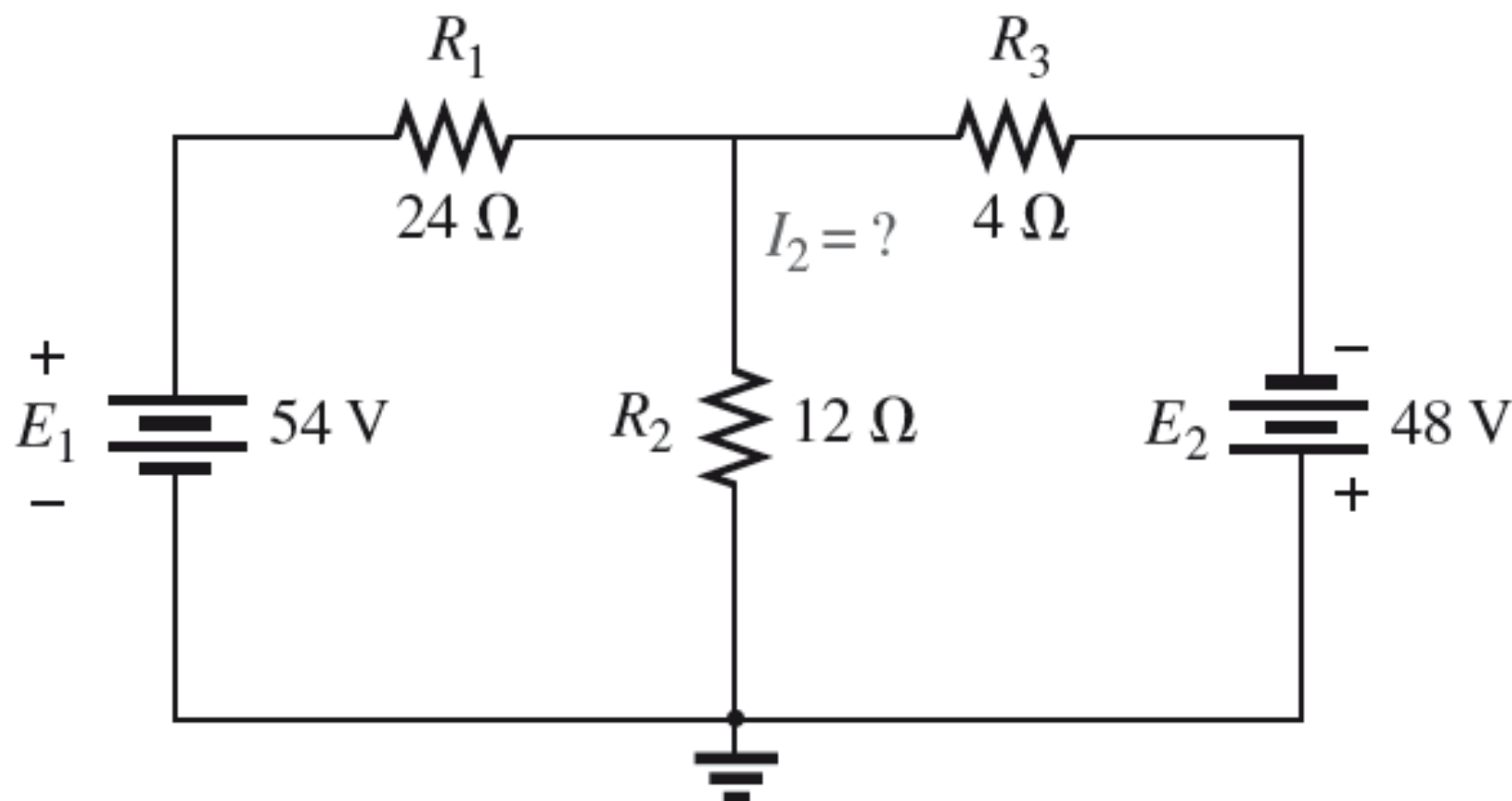


Figura 9.8 Uso do teorema da superposição para determinar a corrente através do resistor de $12\ \Omega$ (Exemplo 9.2).

Teorema da Superposição

Efeito de E_1 .

$$R_T = R_1 + R_2 // R_3 = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 24 + \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 27 \Omega$$

$$I_s = \frac{E_1}{R_T} = \frac{54}{27} = 2 A$$

$$I_2' = I_s \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \cdot \frac{4}{12 + 4} = 0,5 A$$

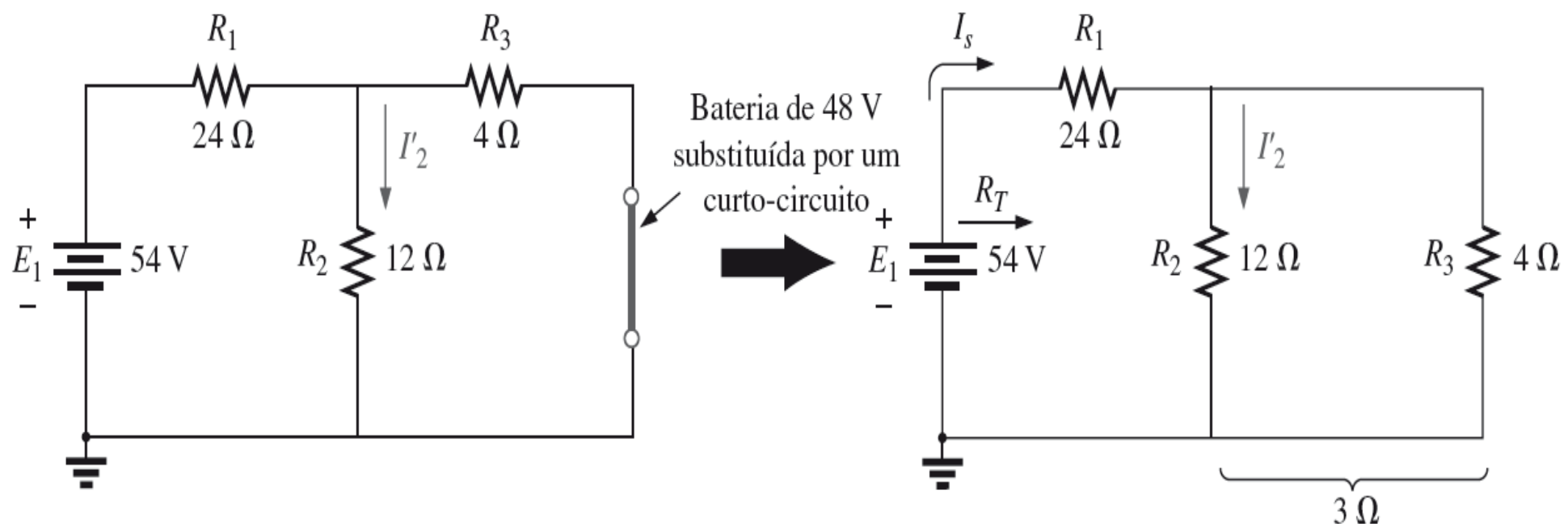


Figura 9.9 Uso do teorema da superposição para determinar o efeito da fonte de tensão de 54 V sobre a corrente I_2 na Figura 9.8.

Teorema da Superposição

Efeito de E_2 .

$$R_T = R_3 + R_1 // R_2 = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 4 + \frac{24 \cdot 12}{24 + 12} = 12 \Omega$$

$$I_S = \frac{E_2}{R_T} = \frac{48}{12} = 4 A$$

$$I_2'' = I_S \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 4 \cdot \frac{24}{24 + 12} = 2,67 A$$

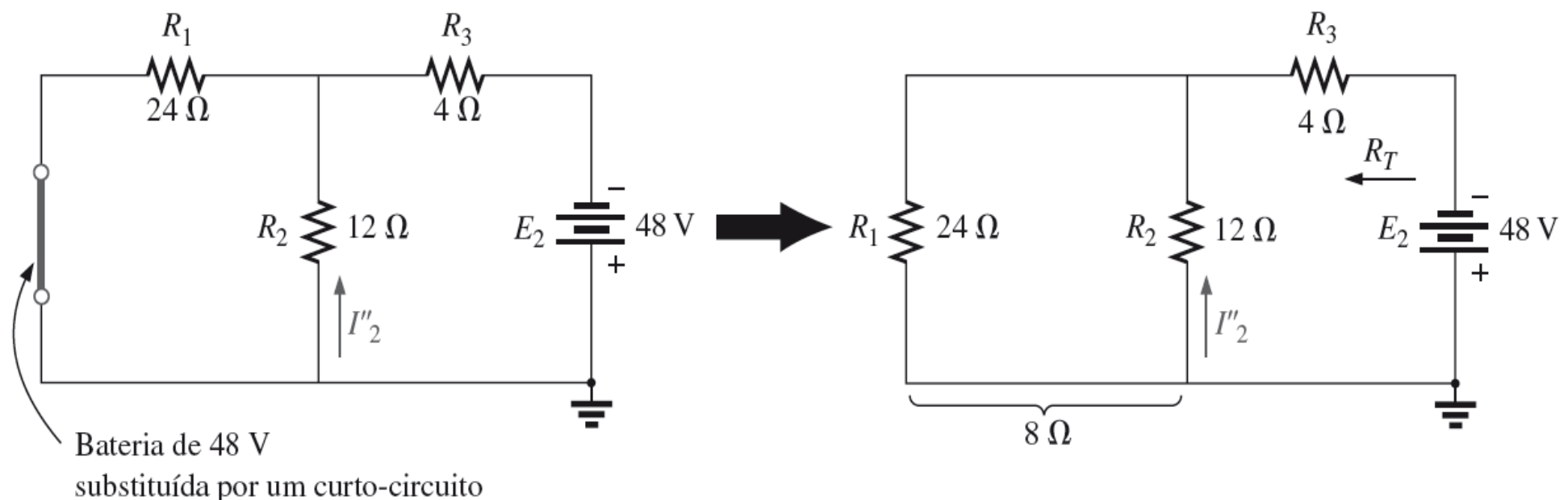


Figura 9.10 Uso do teorema da superposição para determinar o efeito da fonte de tensão de 48 V sobre a corrente I_2 na Figura 9.8.

Teorema da Superposição

Resultado final.

$$I_2 = I_2'' - I_2' = 2,67 - 0,5 = 2,17 A$$

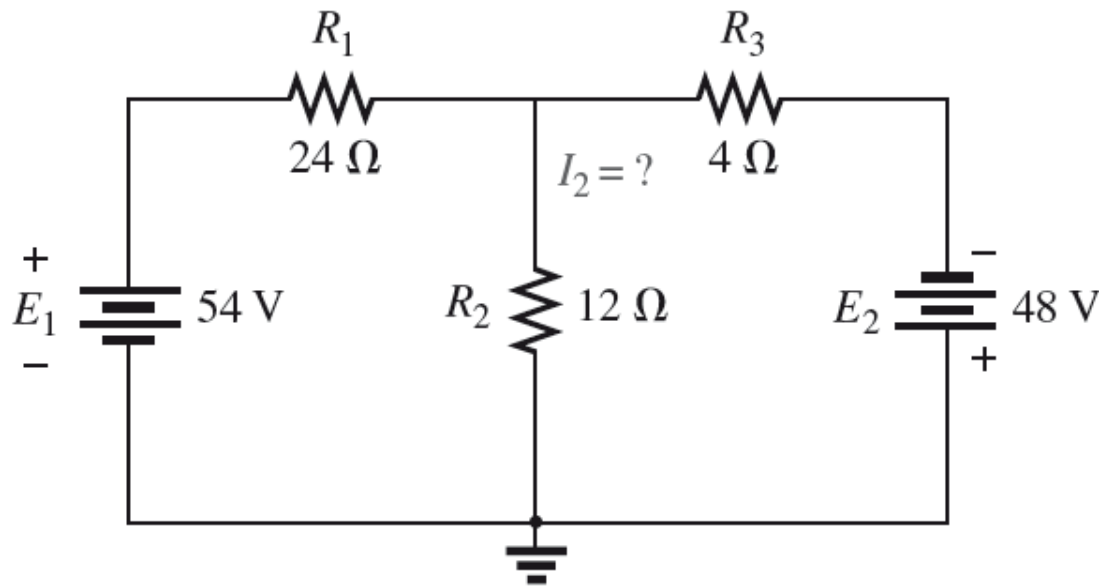


Figura 9.8 Uso do teorema da superposição para determinar a corrente através do resistor de 12Ω (Exemplo 9.2).

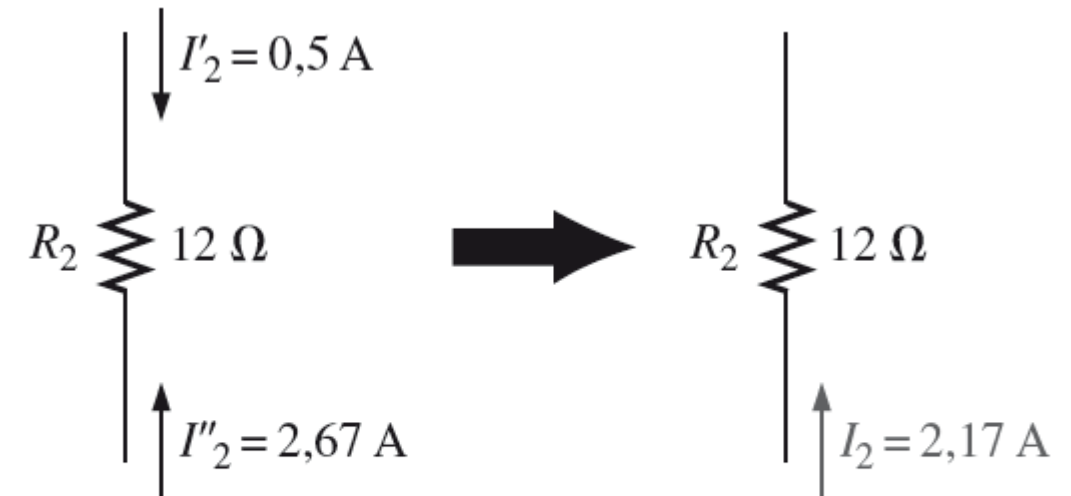


Figura 9.11 Uso dos resultados das figuras 9.9 e 9.10 para determinar a corrente I_2 para o circuito na Figura 9.8.

Teorema da Superposição

Circuito a ser analisado.

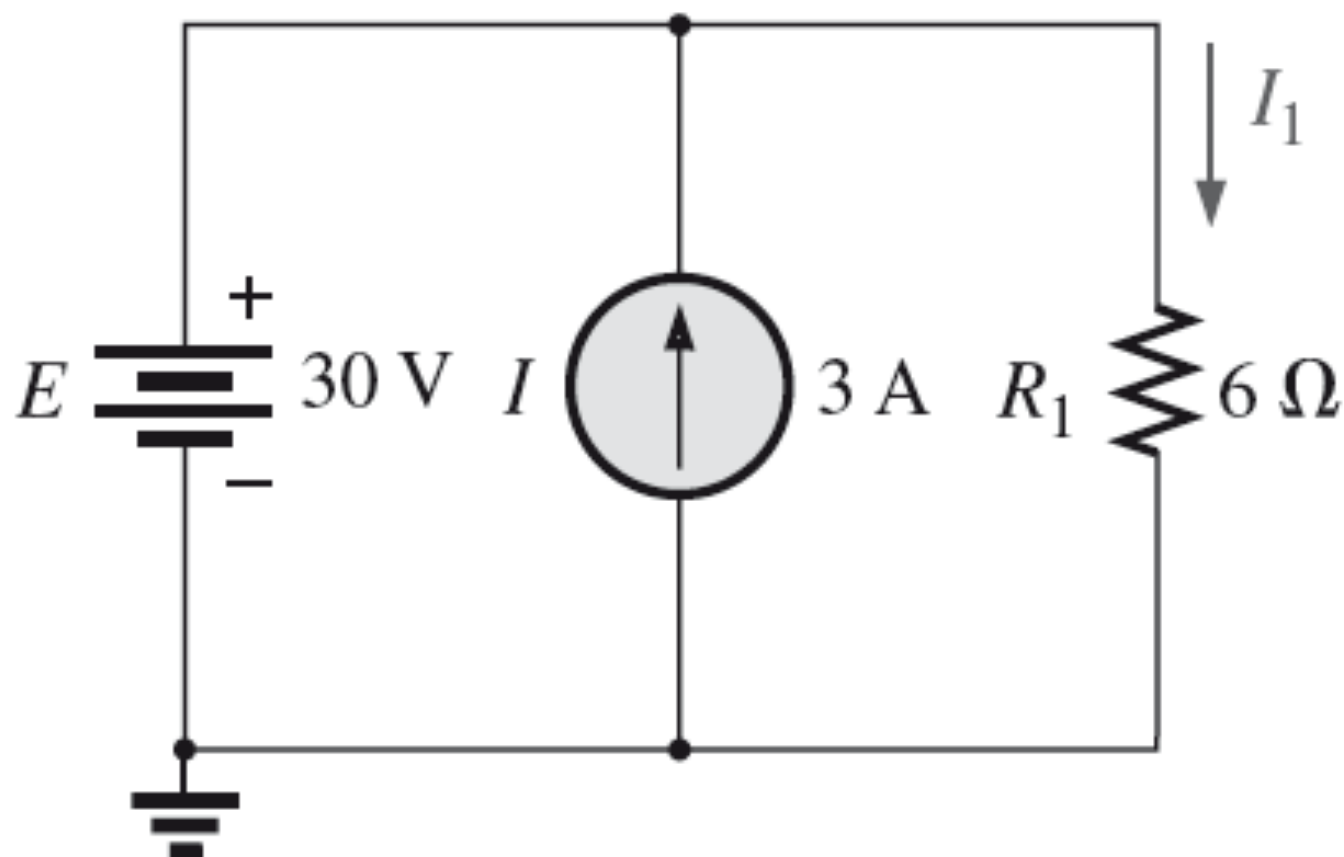


Figura 9.12 Circuito de duas fontes a ser analisado usando o teorema da superposição do Exemplo 9.3.

Teorema da Superposição

Efeitos de E e I e resultado final.

$$I_1' = \frac{E}{R_1} = \frac{30}{6} = 5A$$

$$I_1'' = I \cdot \frac{0}{R_1 + 0} = 3 \cdot \frac{0}{6 + 0} = 0A$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 5 + 0 = 5A$$

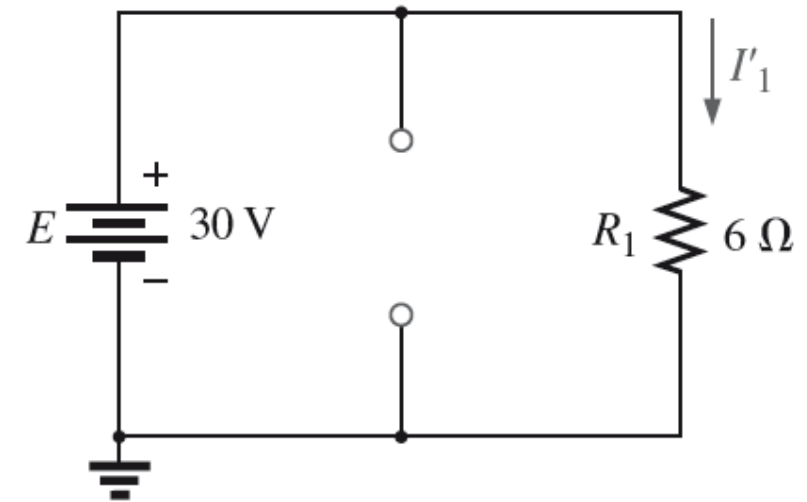


Figura 9.13 Determinação do efeito da fonte de 30 V sobre a corrente I_1 na Figura 9.12.

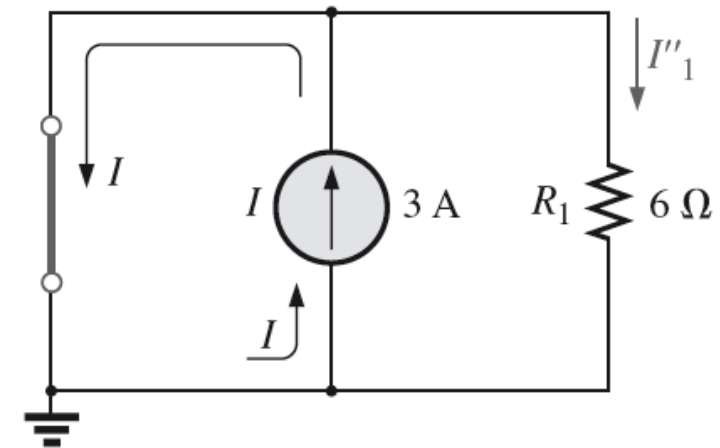


Figura 9.14 Determinação do efeito de fonte de corrente de 3 A sobre a corrente I_1 na Figura 9.12.

Teorema da Superposição

Circuito a ser analisado.

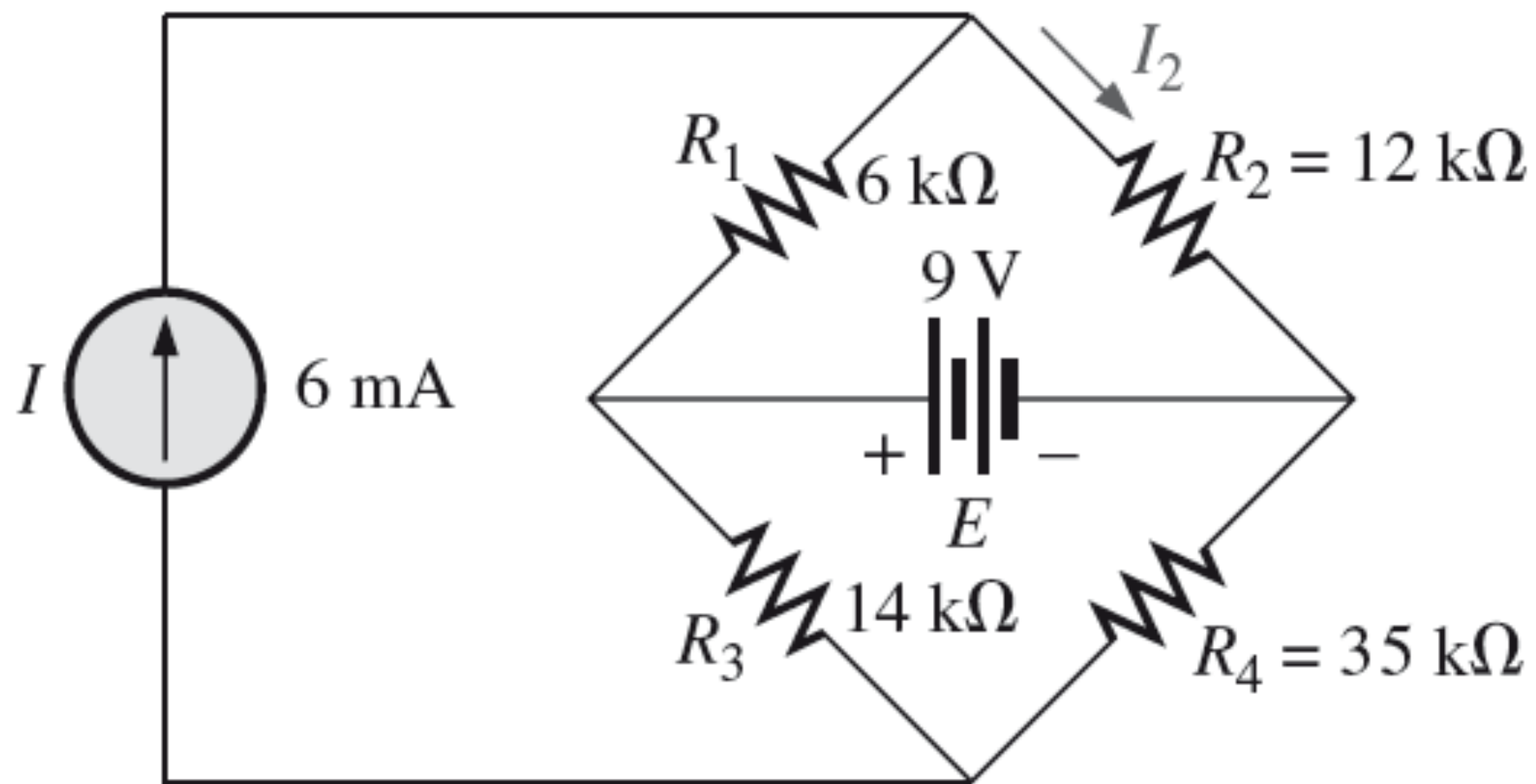


Figura 9.15 Exemplo 9.4.

Teorema da Superposição

Efeito de I .

$$I_2' = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 6m \cdot \frac{6k}{6k + 12k} = 2mA$$

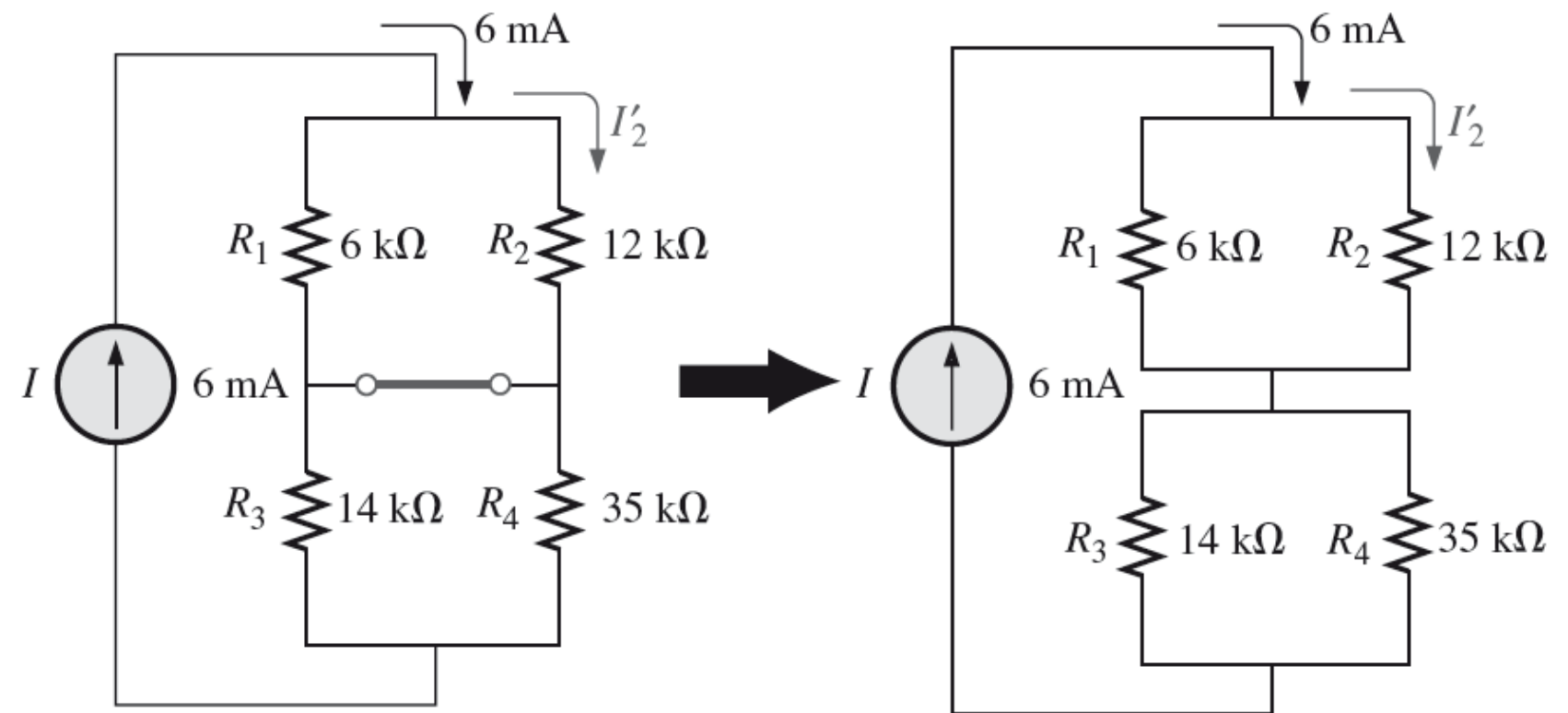


Figura 9.16 Efeito da fonte de corrente I sobre a corrente I_2 .

Teorema da Superposição

Efeito de E .

$$I_2'' = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{9}{6k + 12k} = 0,5mA$$

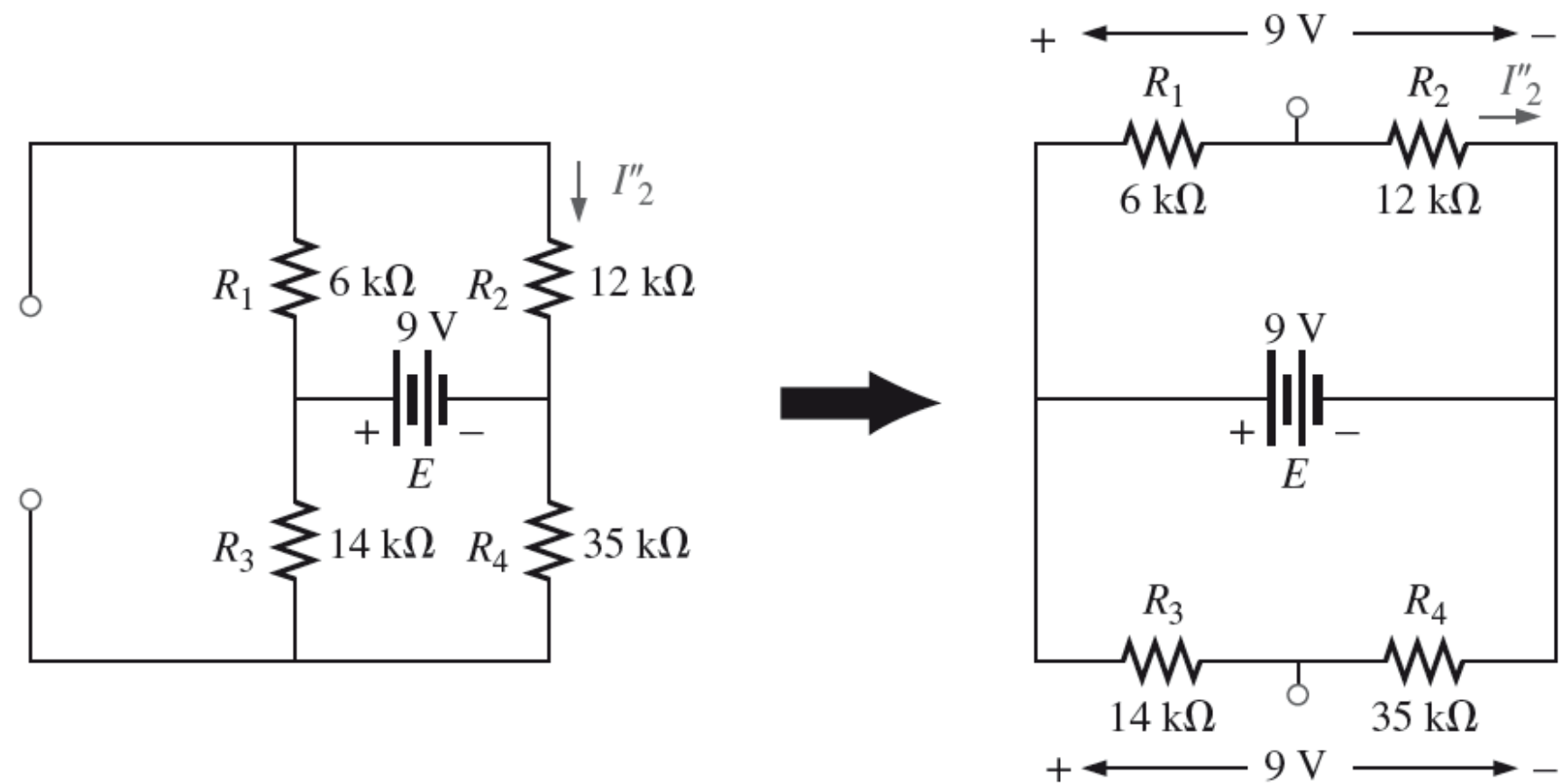


Figura 9.17 Efeito da fonte de tensão E sobre a corrente I_2 .

Teorema da Superposição

Resultado final.

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 2m + 0,5m = 2,5mA$$

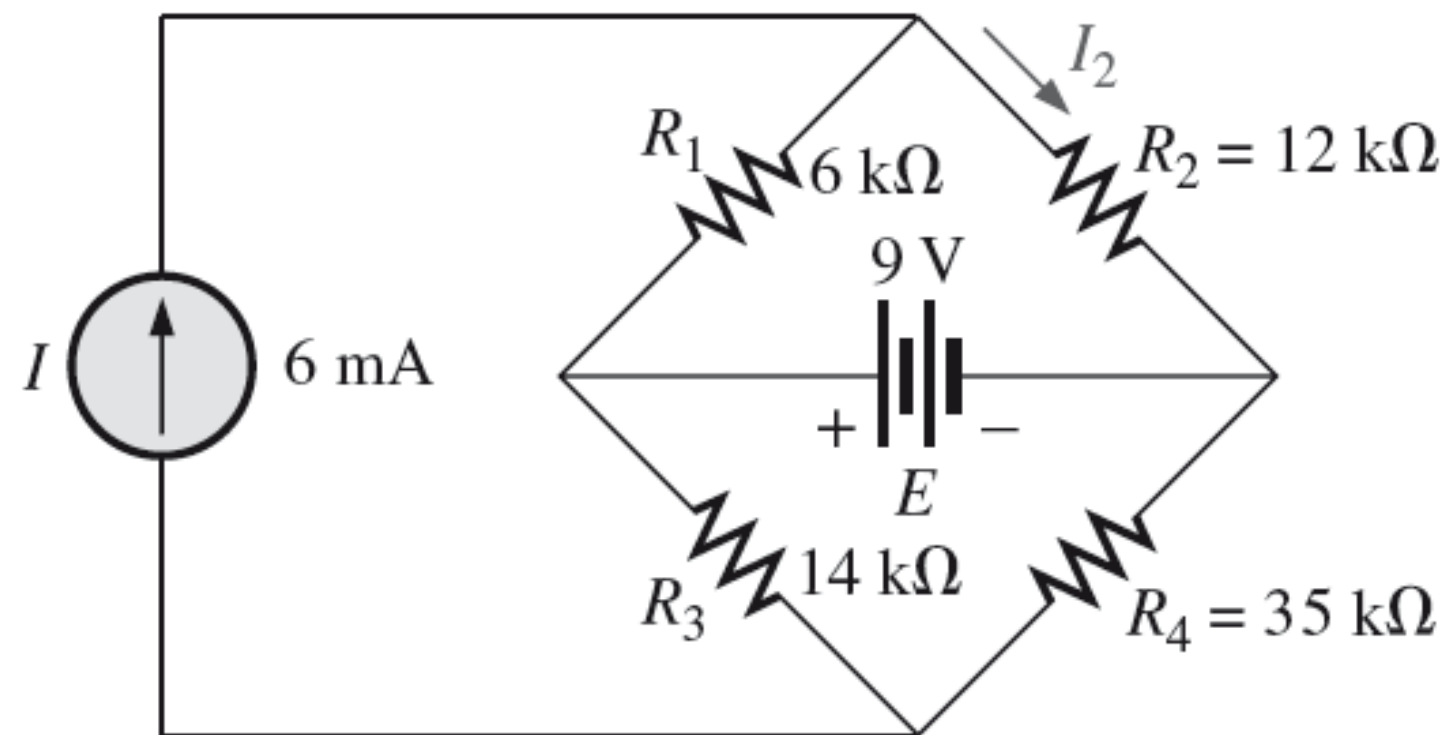


Figura 9.15 Exemplo 9.4.

Teorema da Superposição

Circuito a ser analisado.

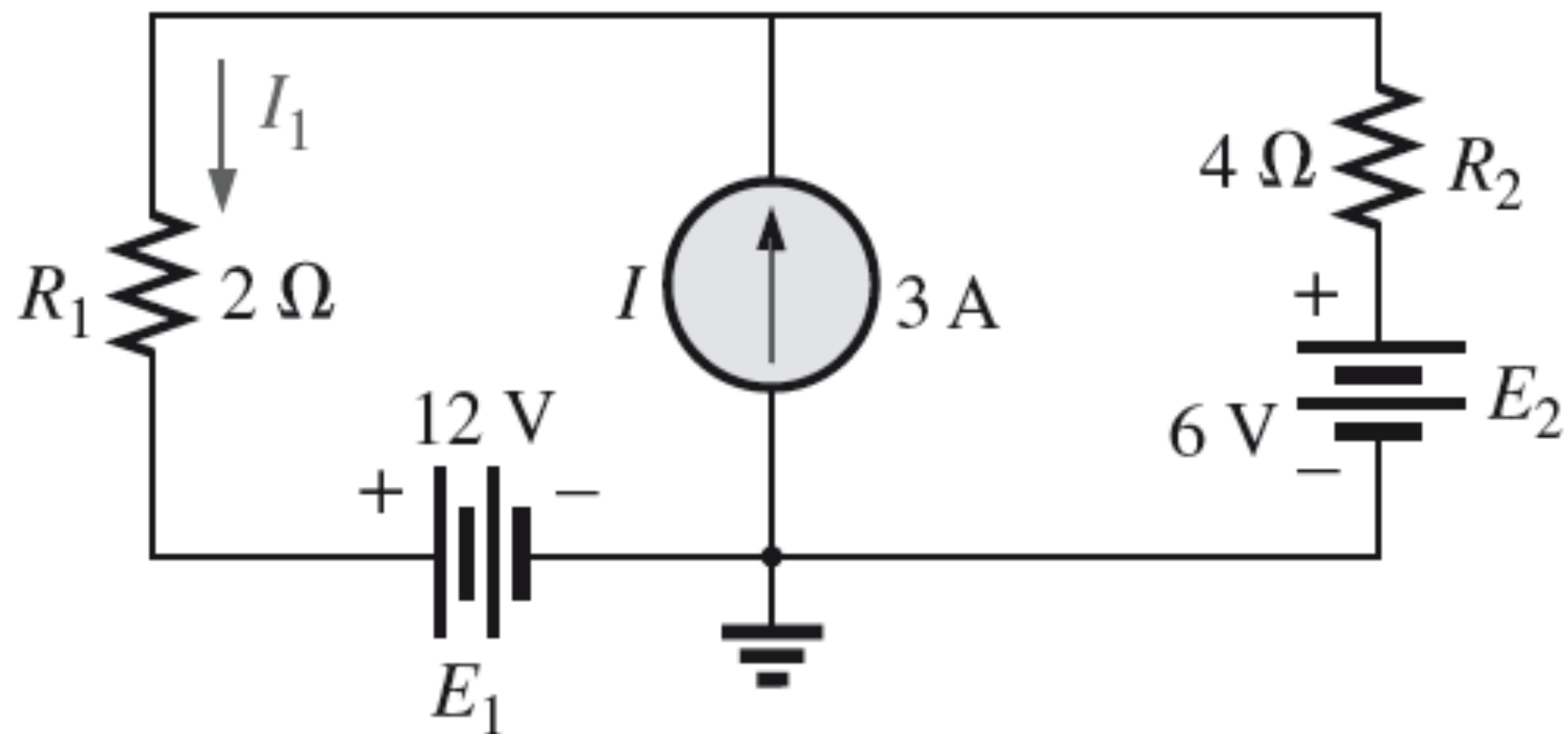


Figura 9.18 Exemplo 9.5.

Teorema da Superposição

Efeito de E_1 .

$$I_1' = \frac{-E_1}{R_1 + R_2} = \frac{-12}{2 + 4} = -2 A$$

O livro possui um desenho repetido, sem apresentar o desenho correto para a análise do efeito da fonte E_1 .

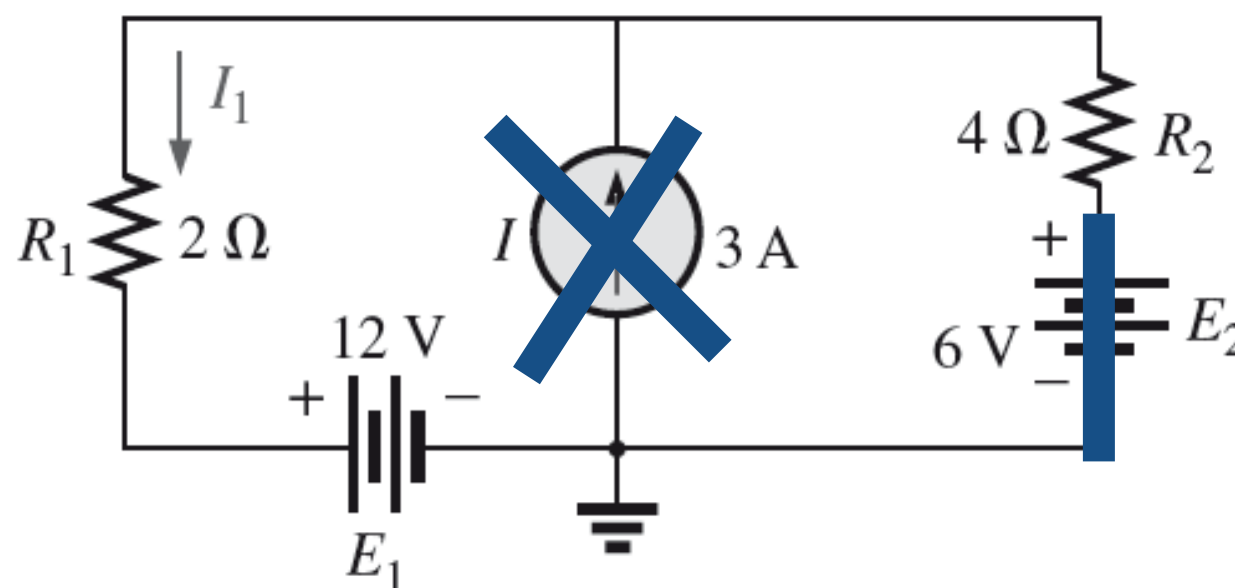


Figura 9.19 Efeito de E_1 sobre a corrente I .

Teorema da Superposição

Efeito de E_2 .

$$I_1'' = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{6}{2 + 4} = 1A$$

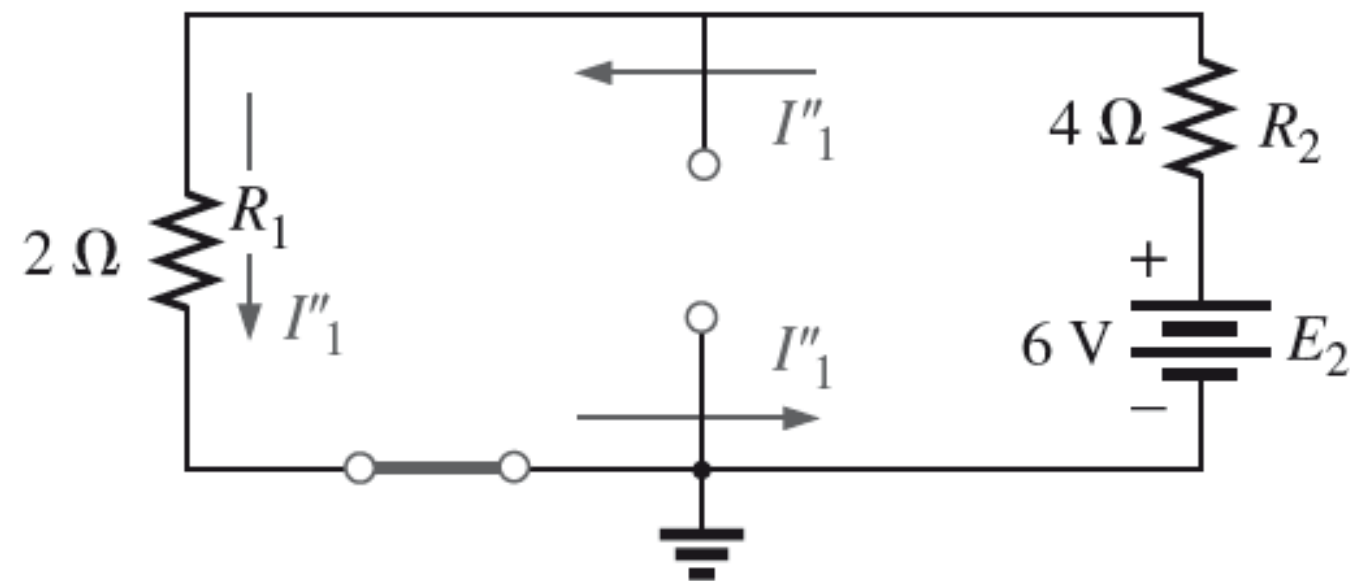


Figura 9.20 Efeito de E_2 sobre a corrente I_1 .

Teorema da Superposição

Efeito de I .

$$I_1''' = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 \cdot \frac{4}{2 + 4} = 2 A$$

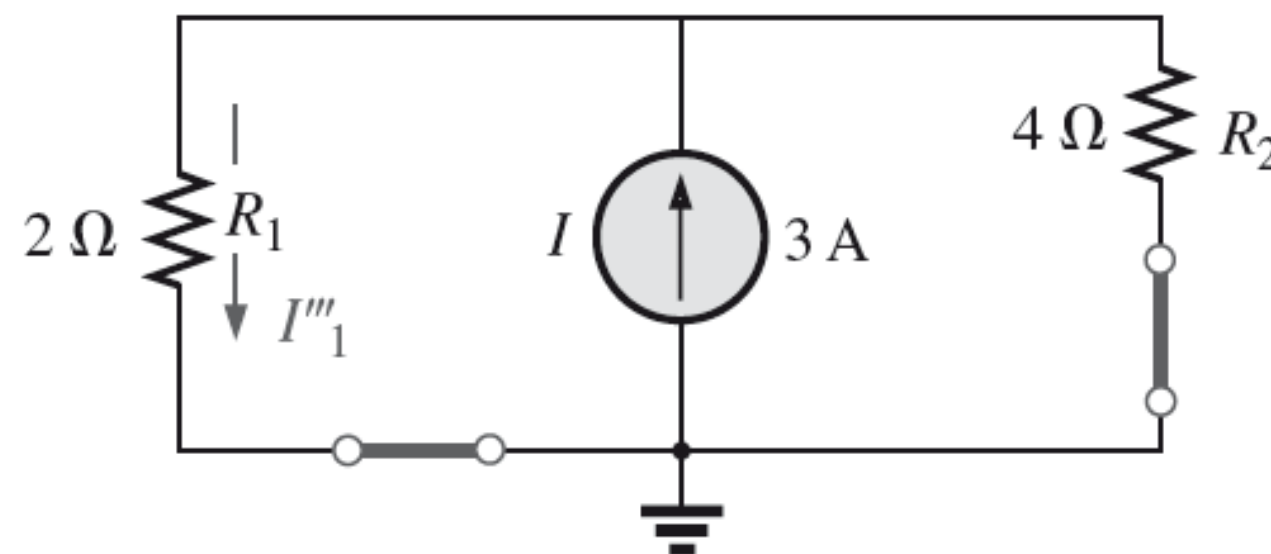


Figura 9.21 Efeito de I sobre a corrente I_1 .

Teorema da Superposição

Resultado final.

$$I_1''' = -I_1' + I_1'' + I_1''' = 2 + 1 + 2 = 1A$$

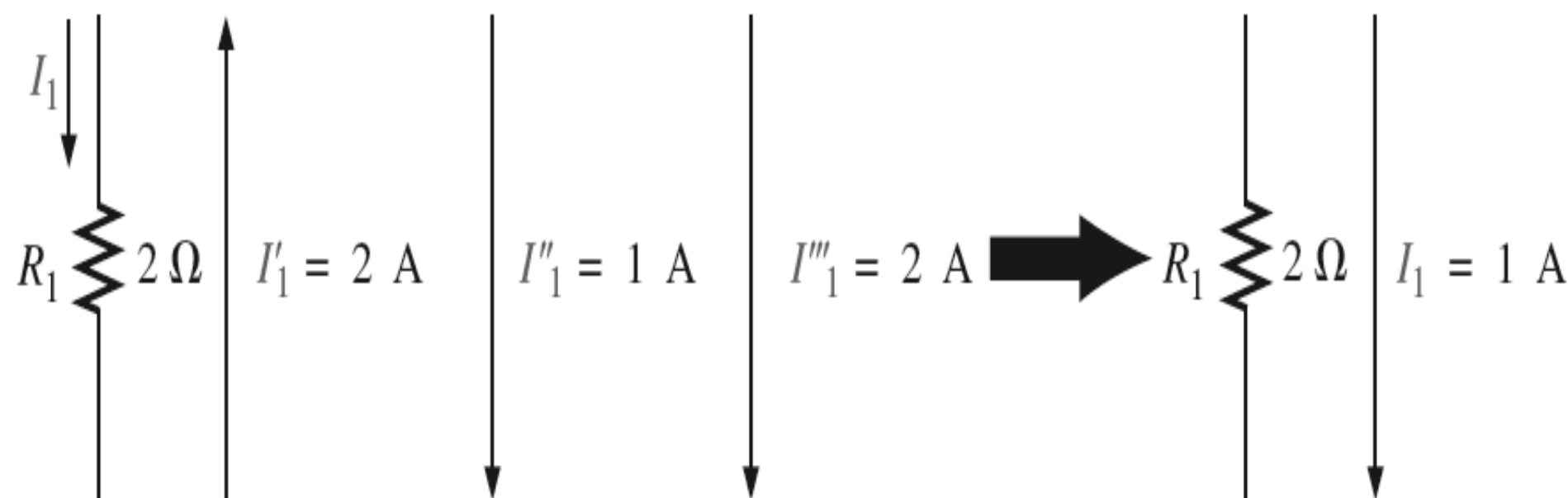


Figura 9.22 Corrente resultante I_1 .

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin:

- O próximo teorema a ser introduzido, o teorema de Thévenin, é provavelmente um dos mais interessantes, na medida em que permite a redução de circuitos complexos para uma forma mais simples de análise e projeto.
- Em geral, o teorema pode ser usado para realizar o seguinte:
- Analisar circuitos com fontes que não estão em série ou em paralelo.
- Reduzir o número de componentes necessários para estabelecer as mesmas características nos terminais de saída.
- Investigar o efeito da mudança de um componente em particular sobre o comportamento de um circuito sem ter de analisar o circuito inteiro após cada mudança.

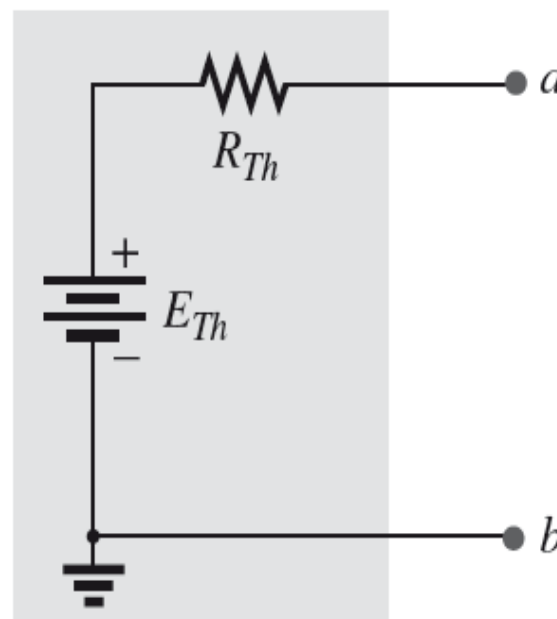


Figura 9.23 Circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin:

- O teorema de Thévenin afirma o seguinte:
 - Qualquer circuito de corrente contínua de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente que consista somente de uma fonte de tensão e de um resistor em série, como mostra a figura abaixo.

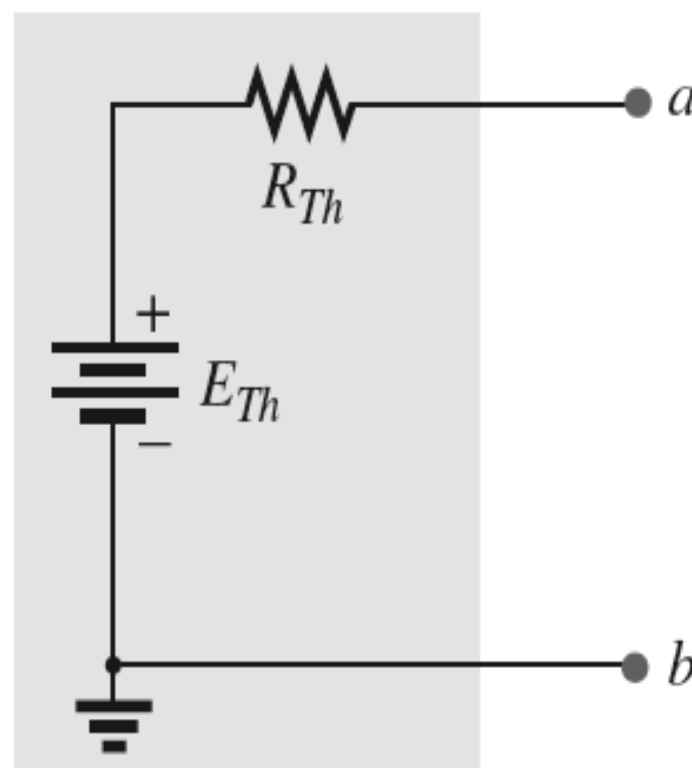


Figura 9.23 Circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin:

- O teorema de Thévenin afirma o seguinte:
 - Qualquer circuito de corrente contínua de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente que consista somente de uma fonte de tensão e de um resistor em série, como mostra a figura abaixo.

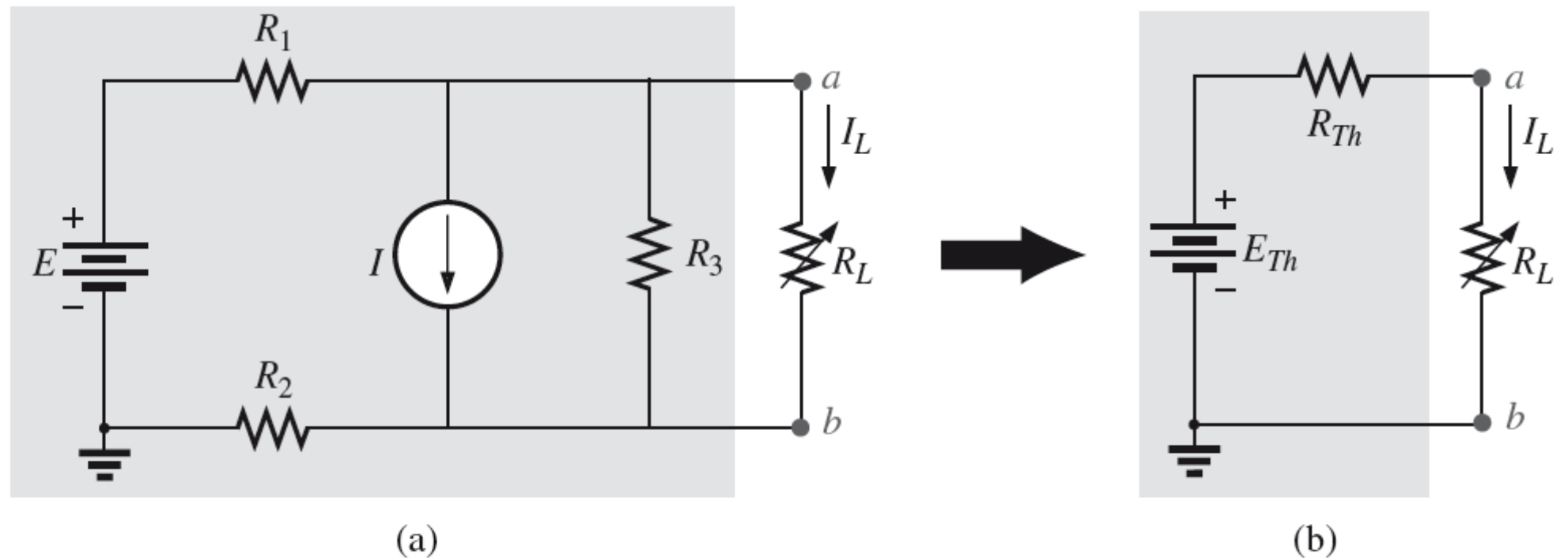


Figura 9.25 Substituição de um circuito complexo pelo circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin:

1. Remova a parte do circuito para a qual deseje obter um equivalente de Thévenin. No caso da anterior, é necessário remover temporariamente o resistor R_L .
2. Assinale os terminais do circuito remanescente. (A importância desse passo ficará óbvia à medida que avançarmos em direção a circuitos mais complexos.)
3. Calcule R_{Th} , colocando primeiro todas as fontes em zero (substituindo as fontes de tensão por curtos-circuitos e as fontes de corrente por circuitos abertos), e, em seguida, determine a resistência equivalente entre os dois terminais escolhidos. (Se o circuito original incluir as resistências internas de fontes de tensão e/ou fontes de corrente, essas resistências devem ser mantidas quando as fontes forem colocadas em zero.)
4. Calcule E_{Th} retornando primeiro todas as fontes às suas posições originais no circuito, e, em seguida, determine a tensão entre os dois terminais escolhidos. (Esse passo é invariavelmente um dos que costuma causar a maior parte de confusões e erros. Tenha sempre em mente que a diferença de potencial deve ser calculada com o circuito aberto entre os terminais assinalados no passo 2.)
5. Desenhe o circuito equivalente de Thévenin e recoloque entre os terminais do circuito equivalente a parte que foi previamente removida. Esse passo é indicado pela inserção do resistor R_L entre os terminais do circuito equivalente de Thévenin, como indicado pela figura.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

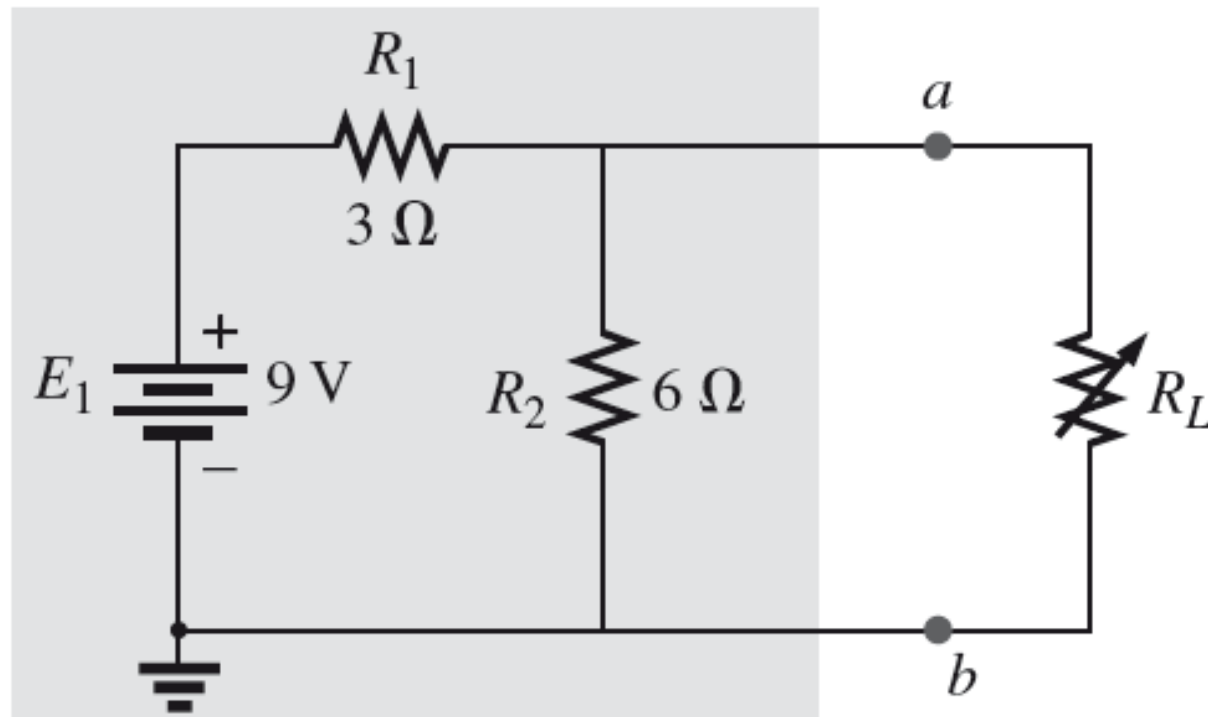


Figura 9.26 Exemplo 9.6.

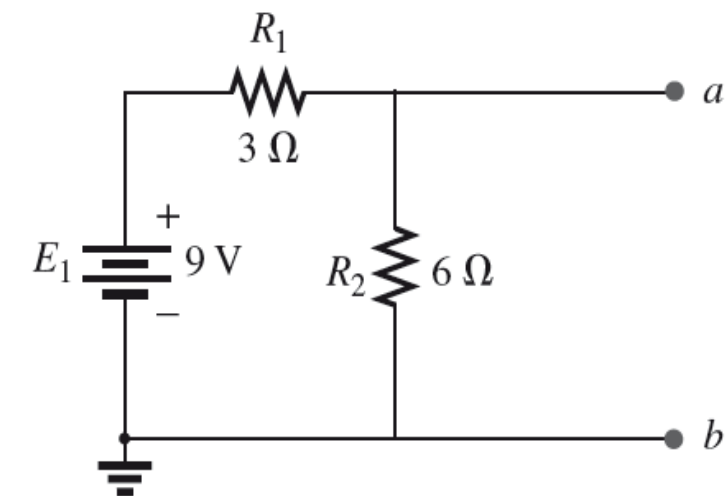


Figura 9.27 Identificação dos terminais de interesse para a aplicação do teorema de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$R_{TH} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2\Omega$$

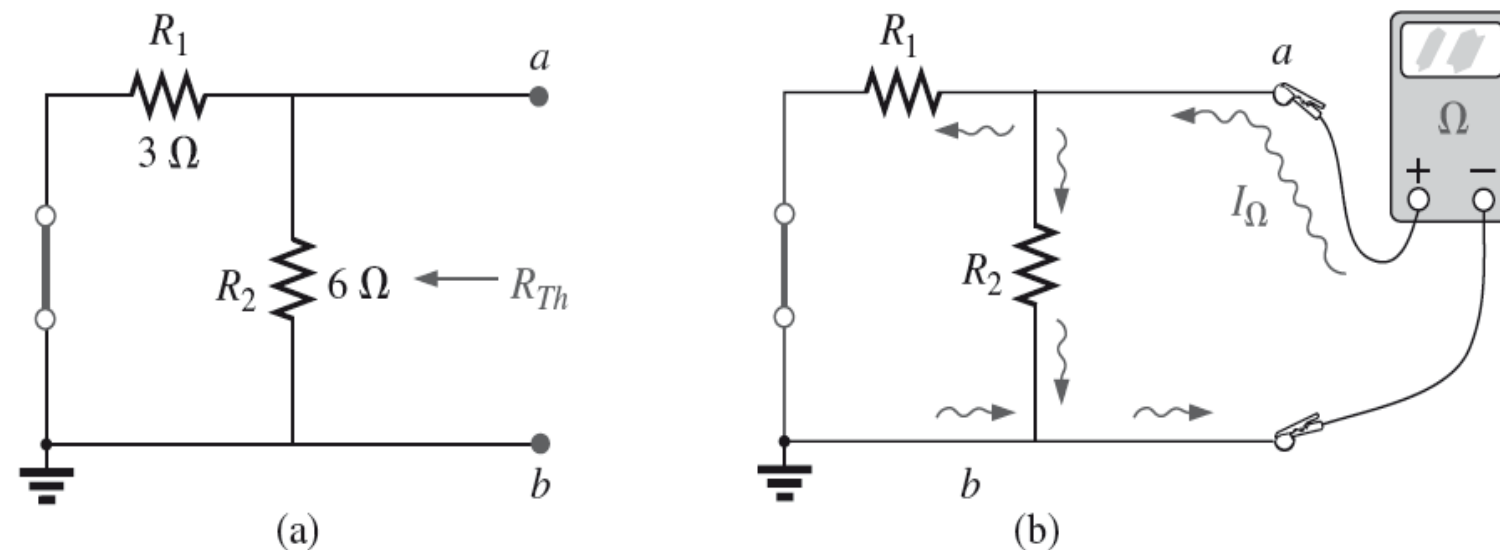


Figura 9.28 Determinação de R_{Th} para o circuito da Figura 9.27.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$E_{TH} = E_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 9 \cdot \frac{6}{3 + 6} = 6V$$

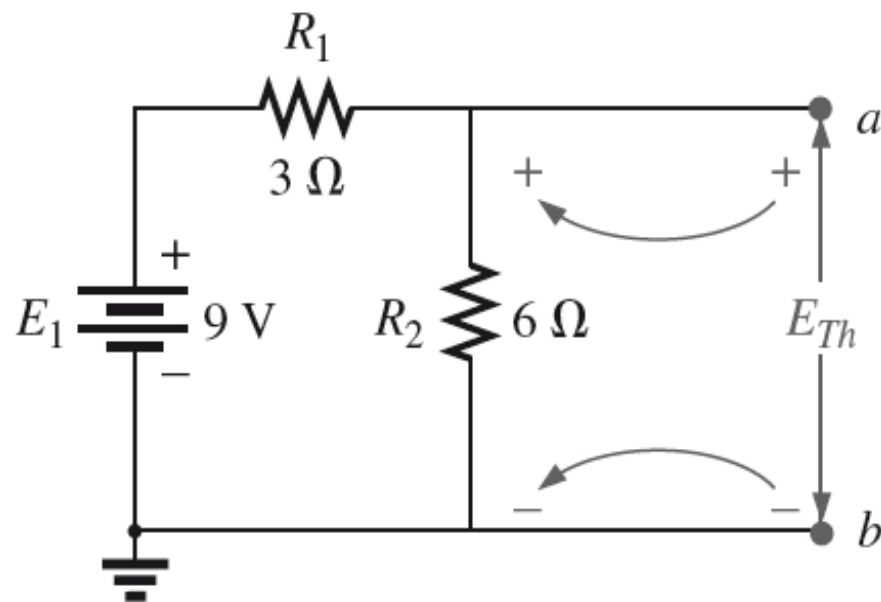


Figura 9.29 Determinação de E_{Th} para o circuito da Figura 9.27.

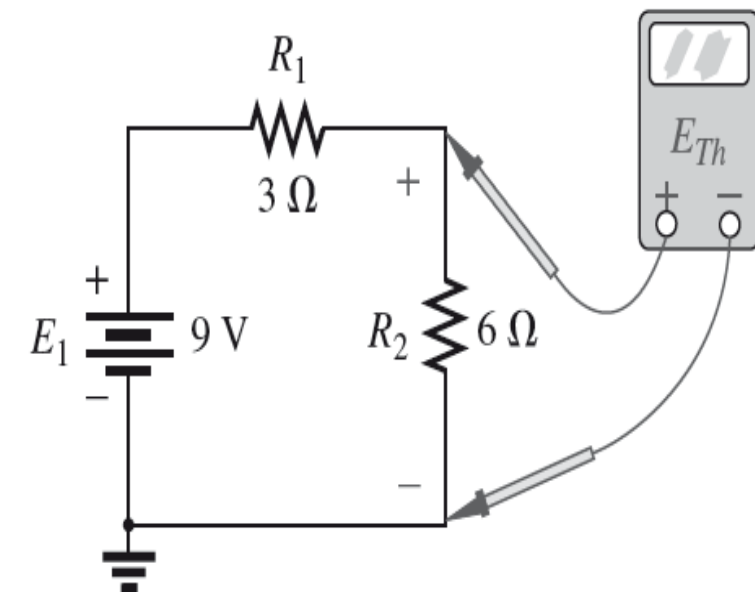


Figura 9.30 Medição de E_{Th} para o circuito da Figura 9.27.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

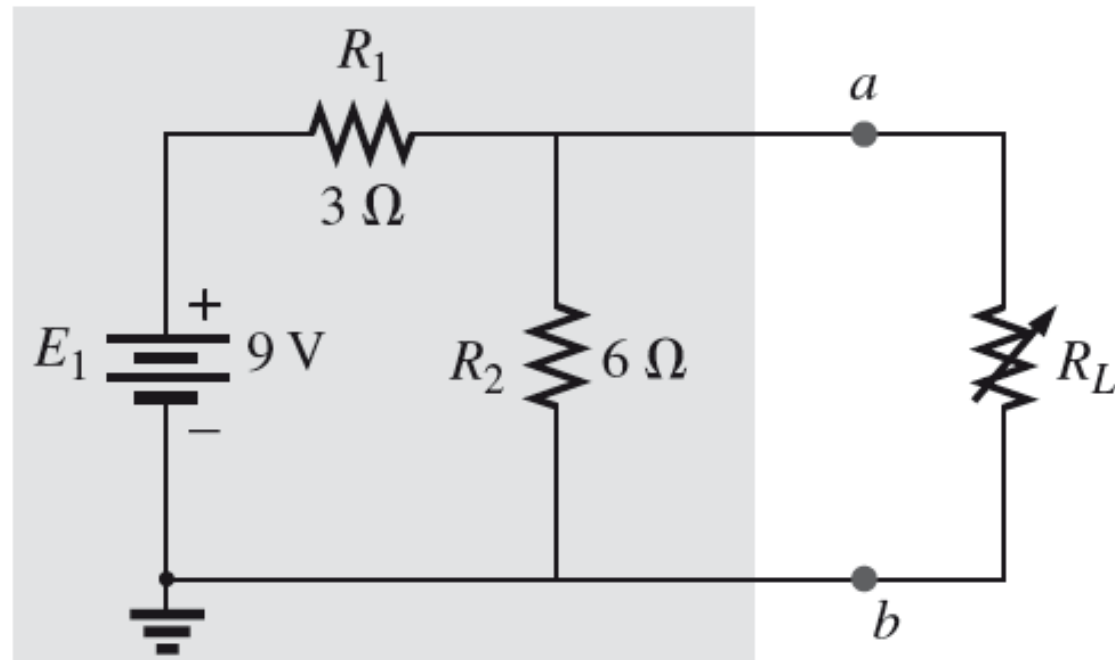


Figura 9.26 Exemplo 9.6.

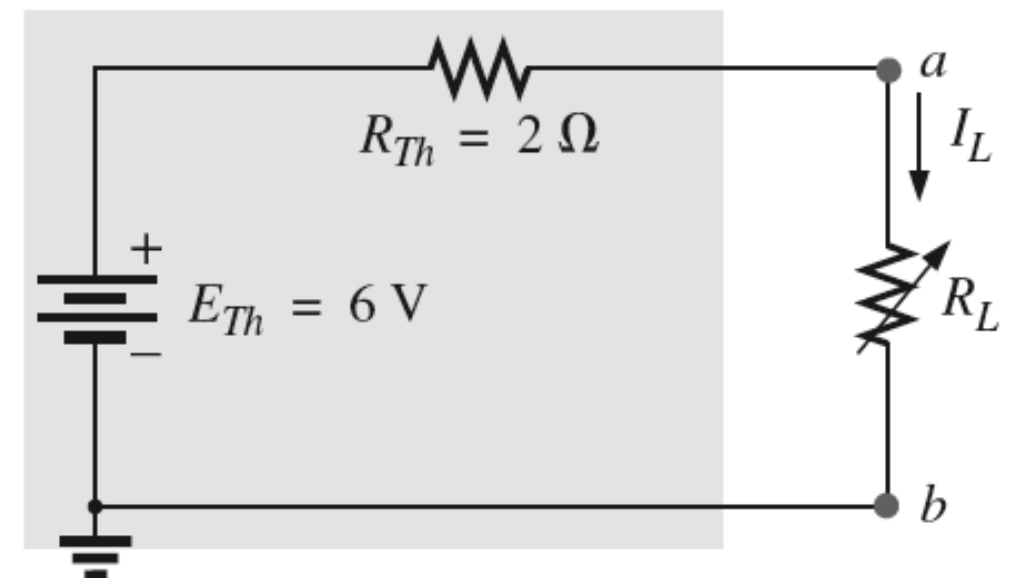


Figura 9.31 Substituição do circuito externo a R_L na Figura 9.26 pelo circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

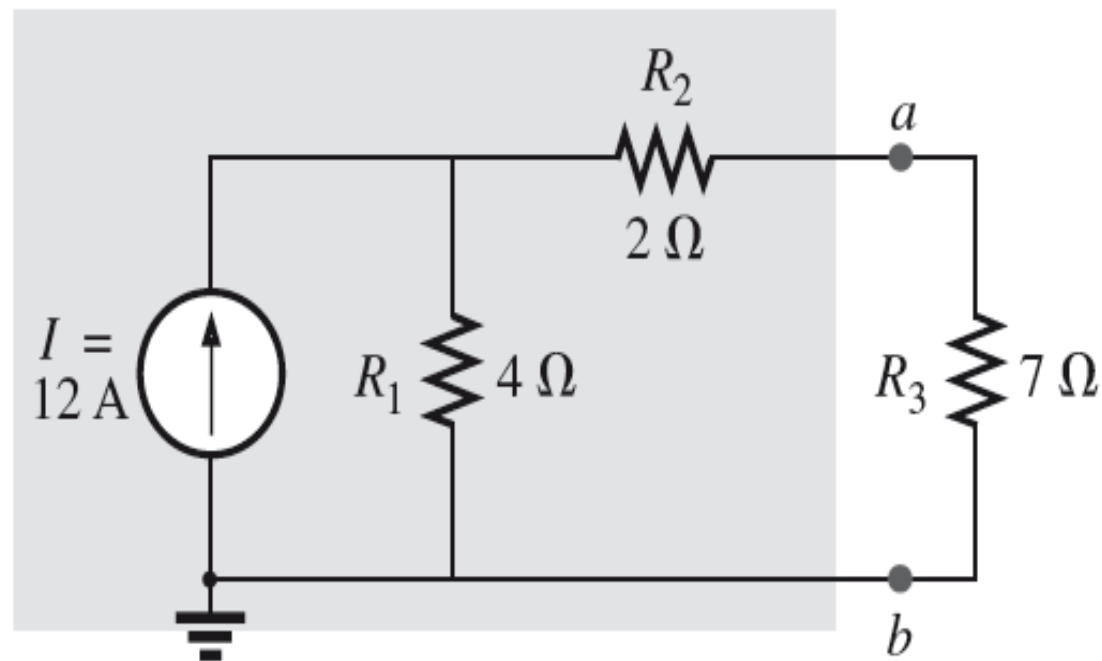


Figura 9.32 Exemplo 9.7.

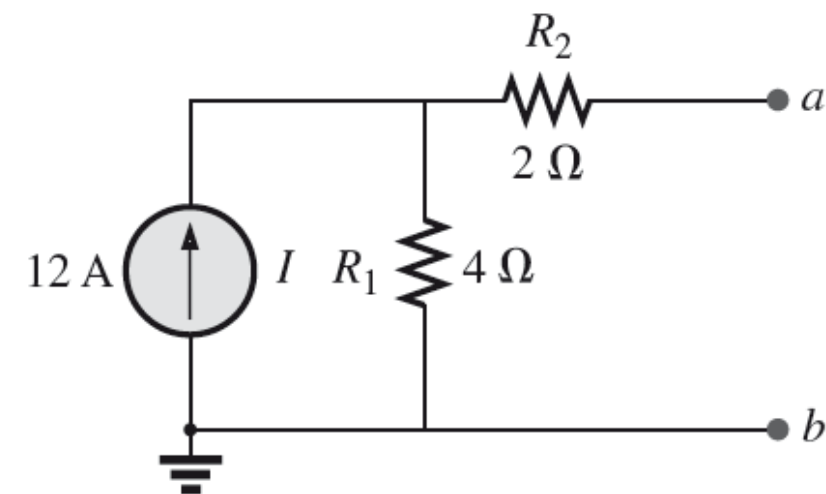


Figura 9.33 Identificação dos terminais de interesse para o circuito da Figura 9.32.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$R_{TH} = R_1 + R_2 = 2 + 4 = 6\Omega$$

$$E_{TH} = I \cdot R_1 = 12 \cdot 4 = 48V$$

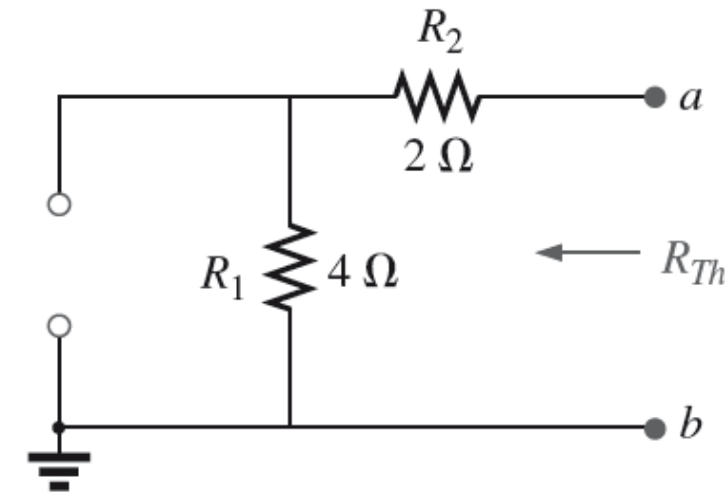


Figura 9.34 Determinação de R_{Th} para o circuito da Figura 9.33.

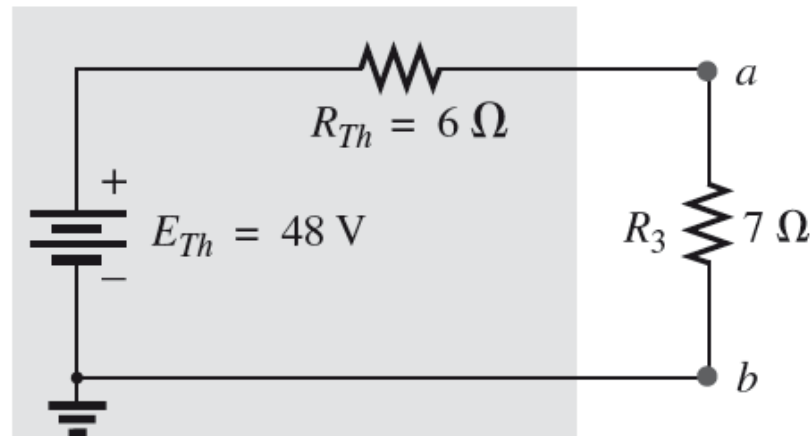


Figura 9.36 Substituição do circuito externo ao resistor R_3 na Figura 9.32 pelo circuito equivalente de Thévenin.

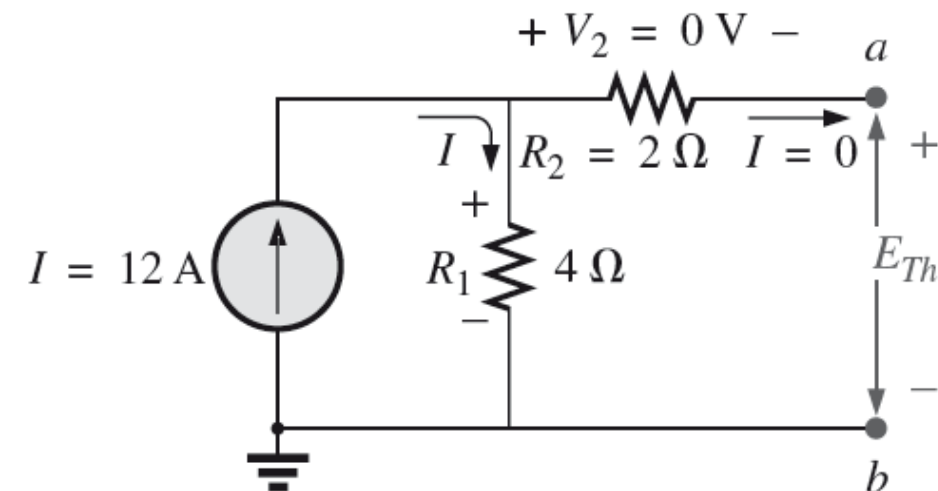


Figura 9.35 Determinação de E_{Th} para o circuito da Figura 9.33.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

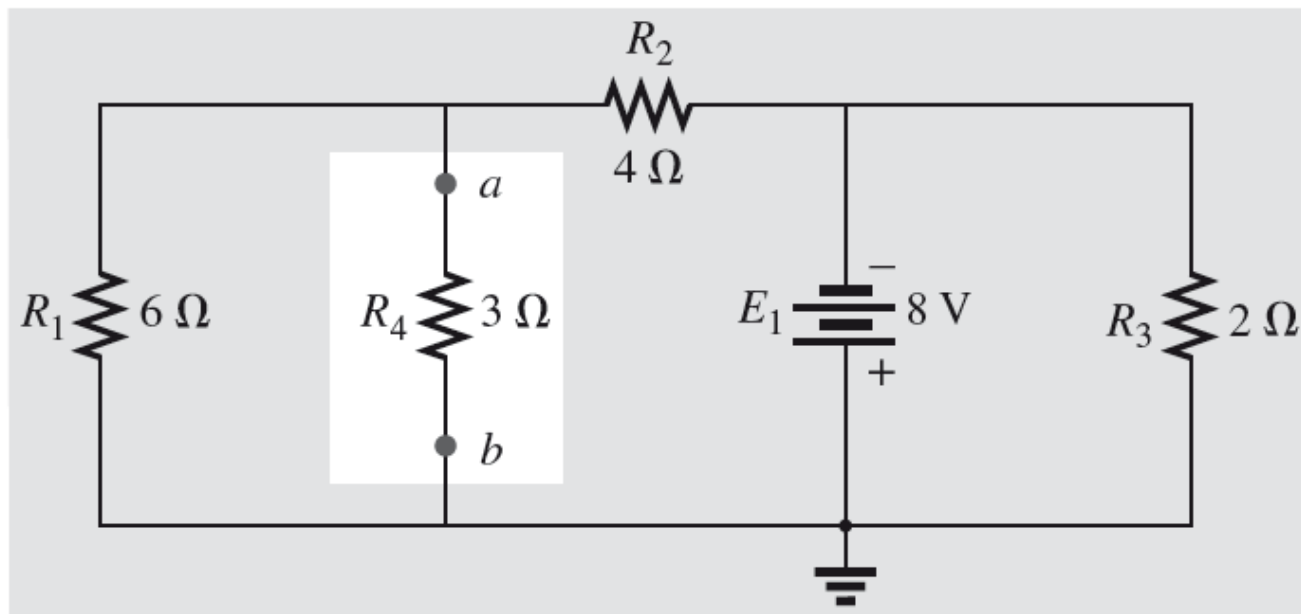


Figura 9.37 Exemplo 9.8.

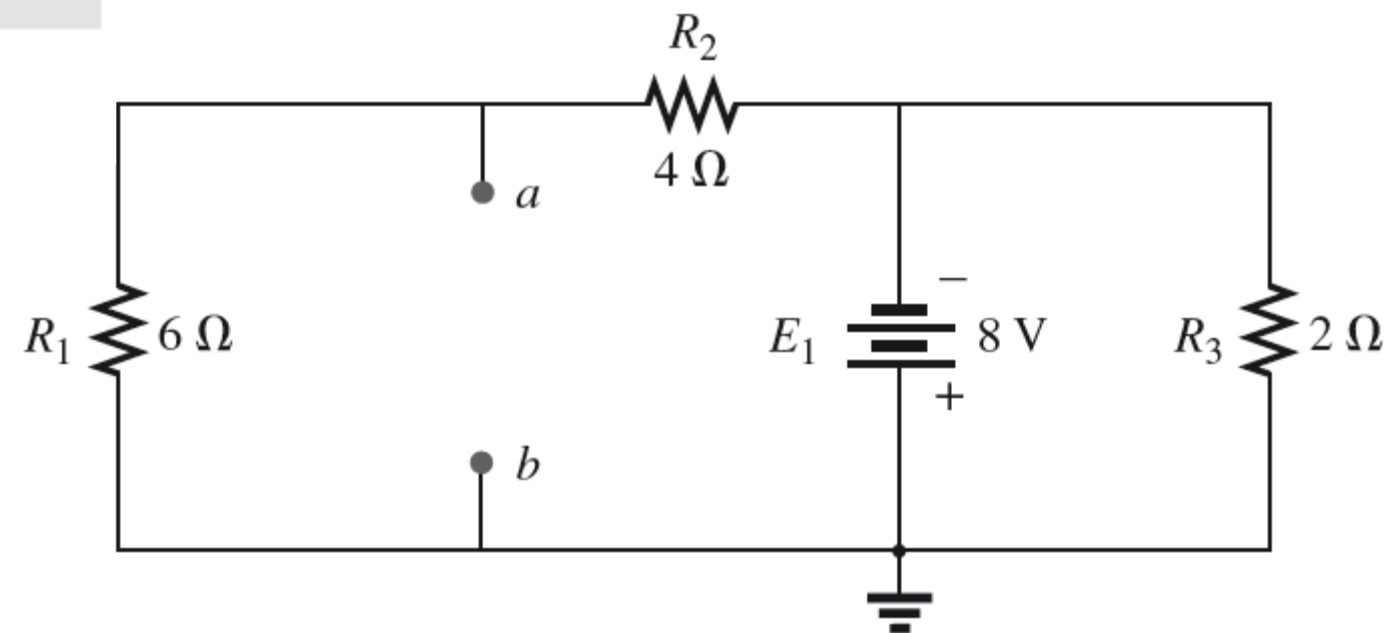


Figura 9.38 Identificação dos terminais de interesse para o circuito da Figura 9.37.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$R_{TH} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2,4\Omega$$

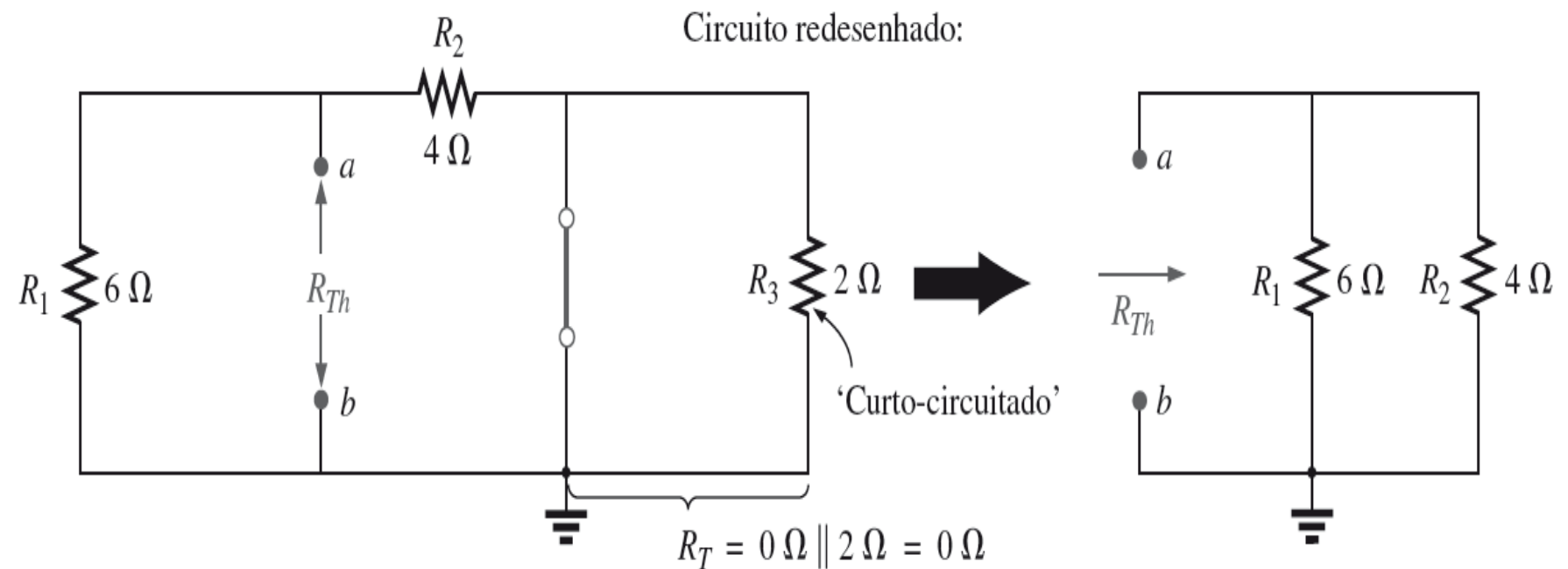


Figura 9.39 Determinação de R_{Th} para o circuito da Figura 9.38.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$E_{TH} = E_1 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 8 \cdot \frac{6}{6 + 4} = 4,8V$$

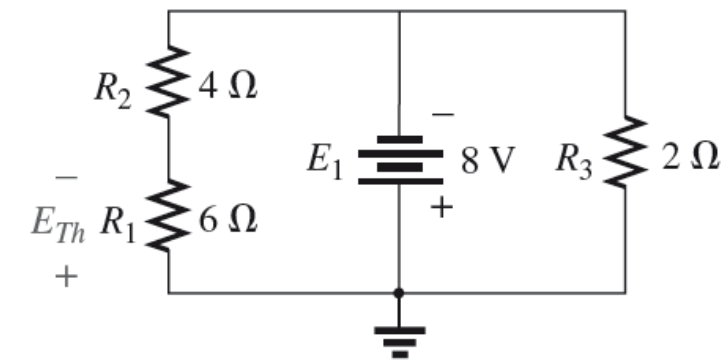


Figura 9.41 Circuito da Figura 9.40 redesenhado.

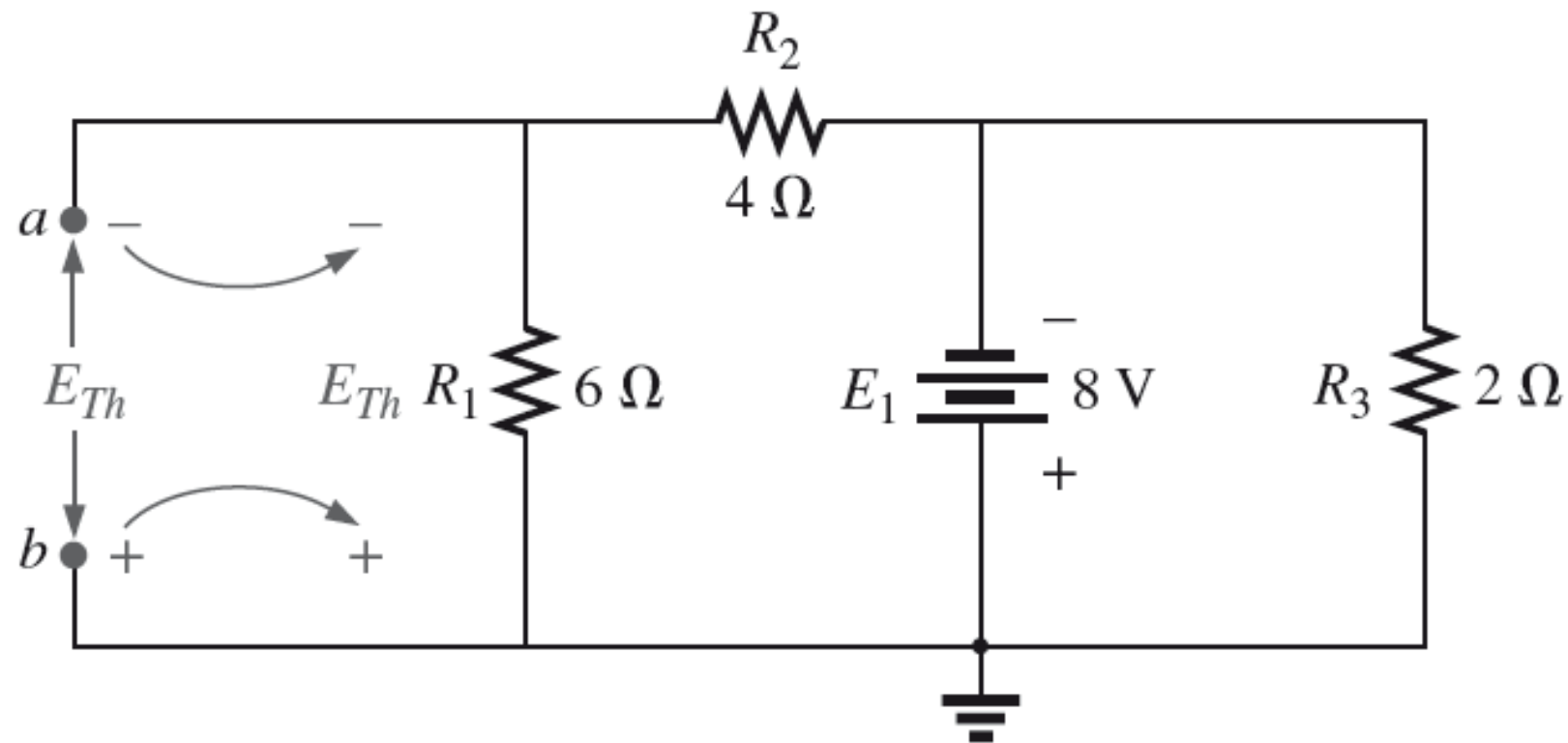


Figura 9.40 Determinação de E_{Th} para o circuito da Figura 9.38.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

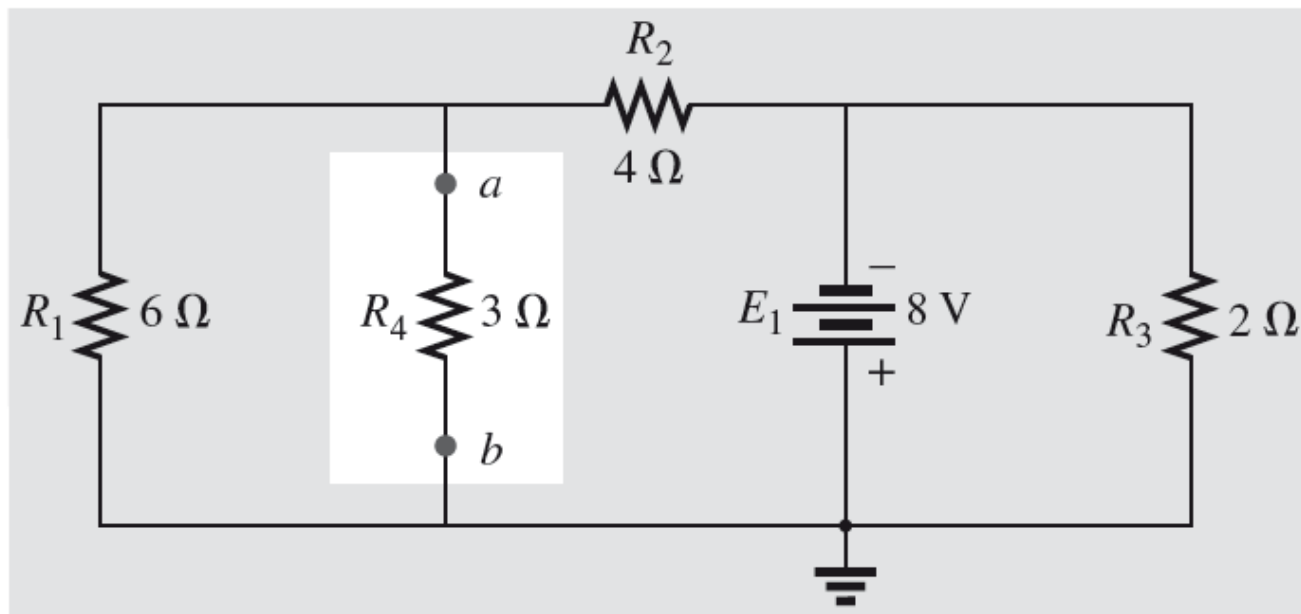


Figura 9.37 Exemplo 9.8.

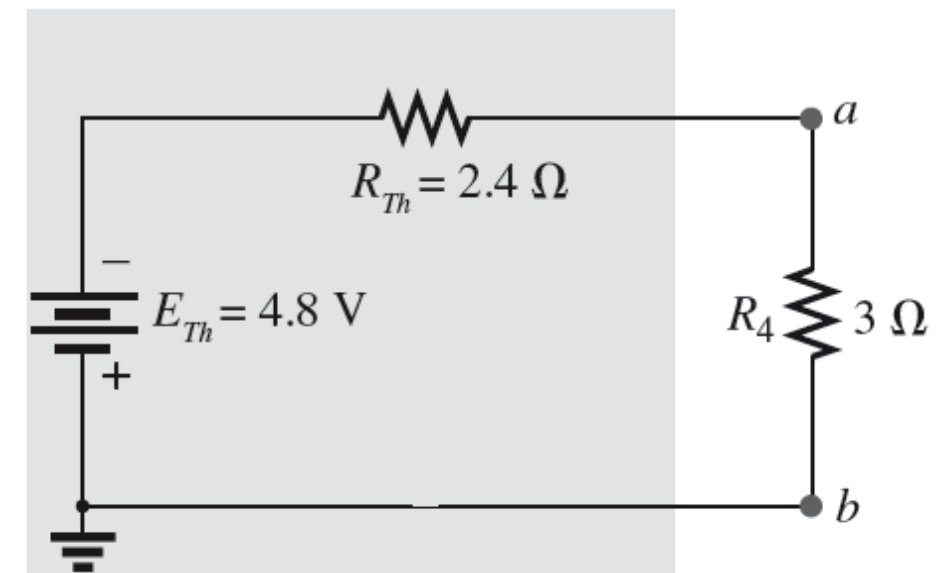


Figura 9.42 Substituição do circuito externo ao resistor R_4 na Figura 9.37 pelo circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

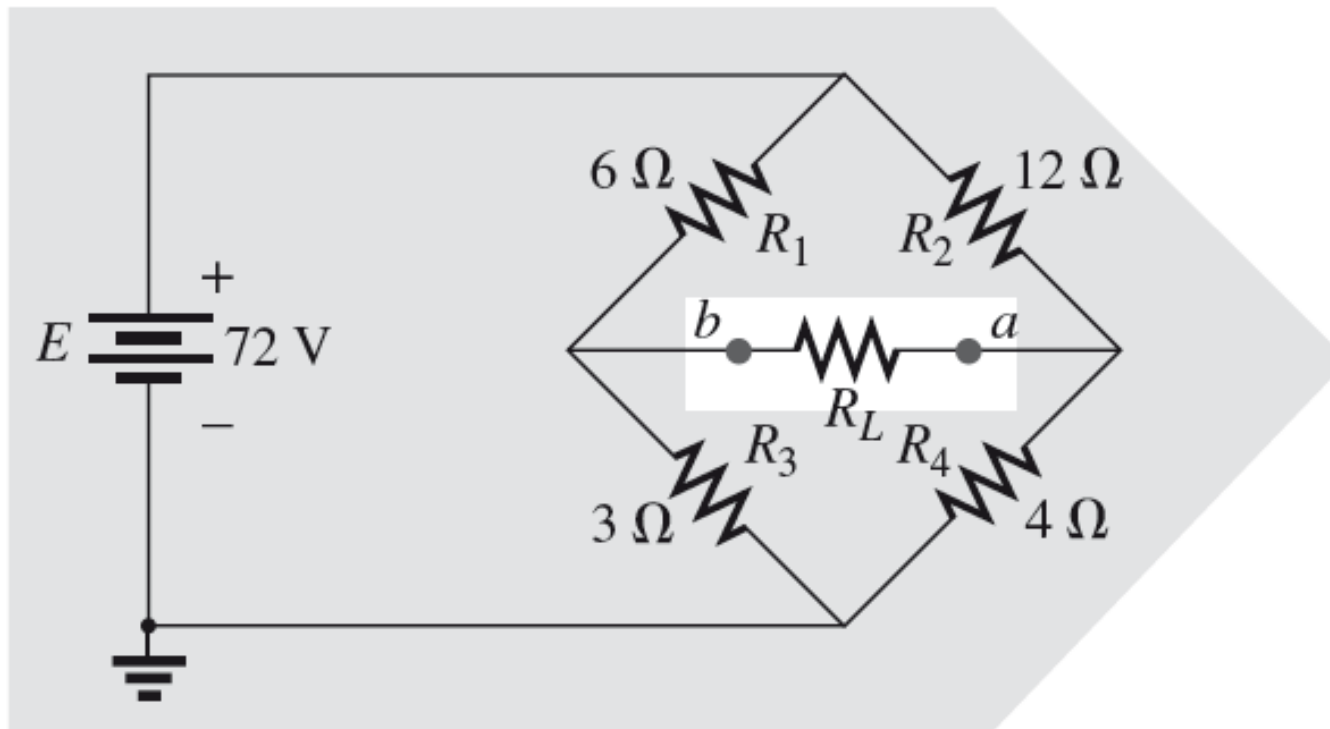


Figura 9.43 Exemplo 9.9.

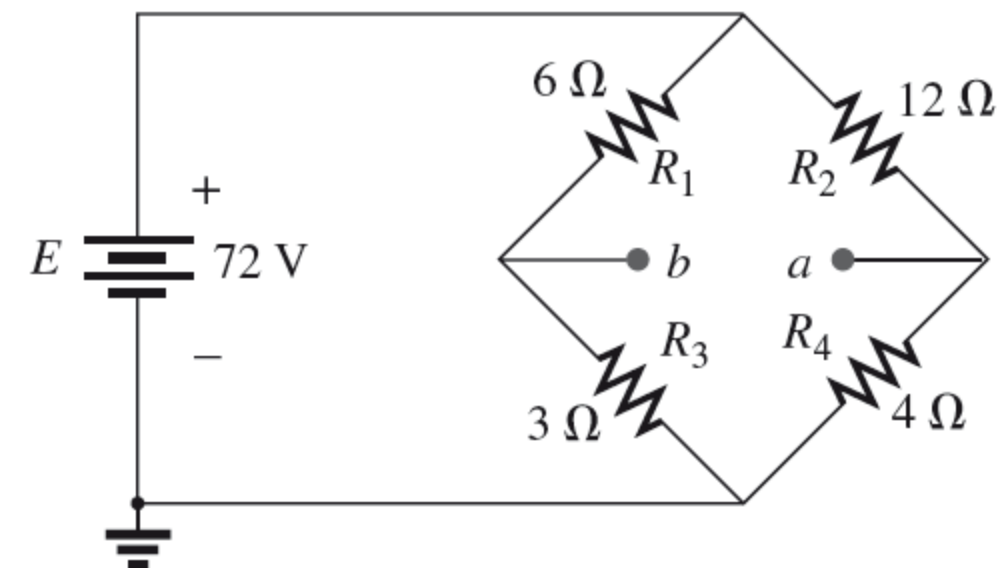


Figura 9.44 Identificação dos terminais de interesse para a aplicação do teorema de Thévenin ao circuito da Figura 9.43.

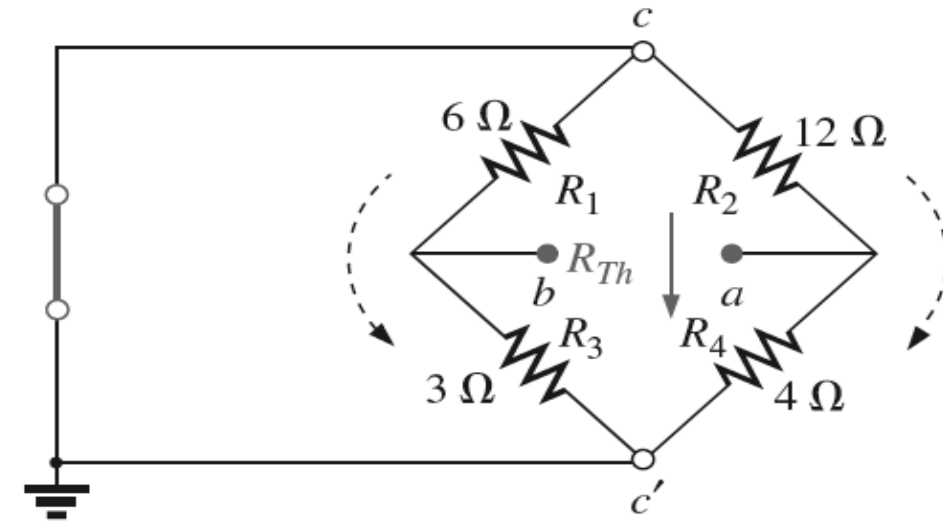
Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

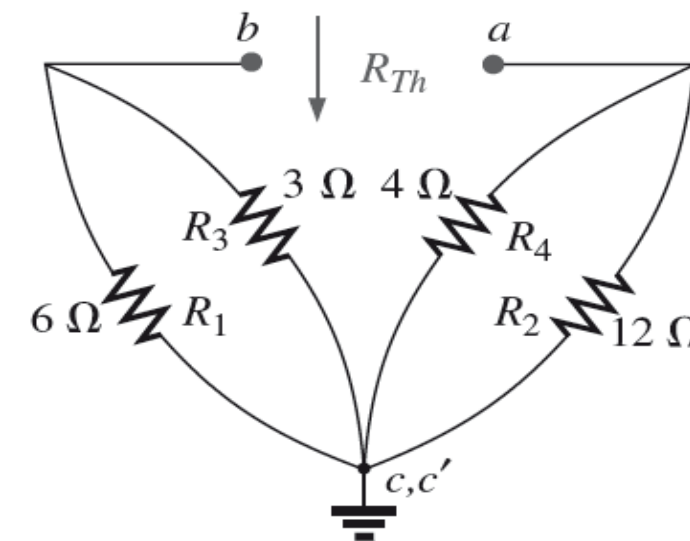
$$R_{TH} = (R_1 // R_3) + (R_2 // R_4)$$

$$R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4}$$

$$R_{TH} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} + \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 2 + 3 = 5\Omega$$



(a)



(b)

Figura 9.45 Determinação de R_{Th} para o circuito da Figura 9.44.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$E_{TH} = V_b - V_a$$

$$V_a = E \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 72 \cdot \frac{4}{12 + 4} = 18V$$

$$V_b = E \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 72 \cdot \frac{3}{6 + 3} = 24V$$

$$E_{TH} = V_b - V_a = 24 - 18 = 6V$$

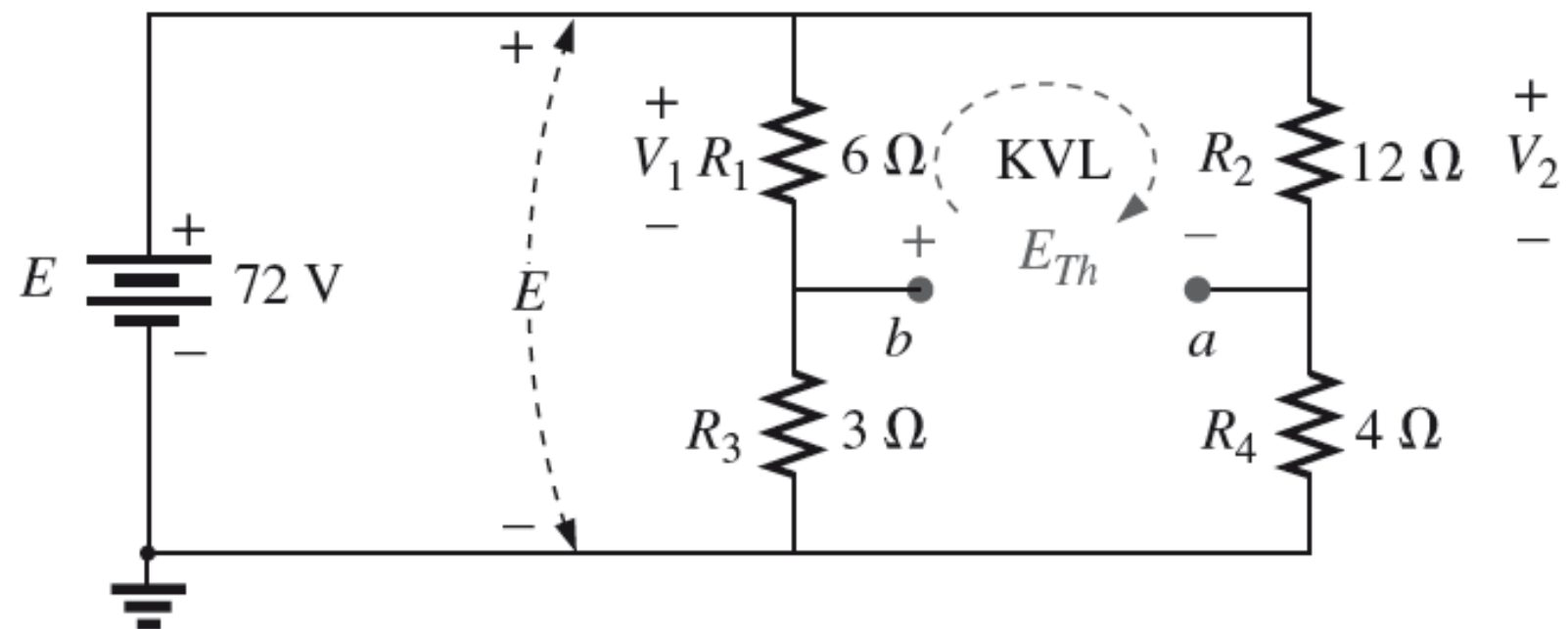


Figura 9.46 Determinação de E_{Th} para o circuito da Figura 9.44.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

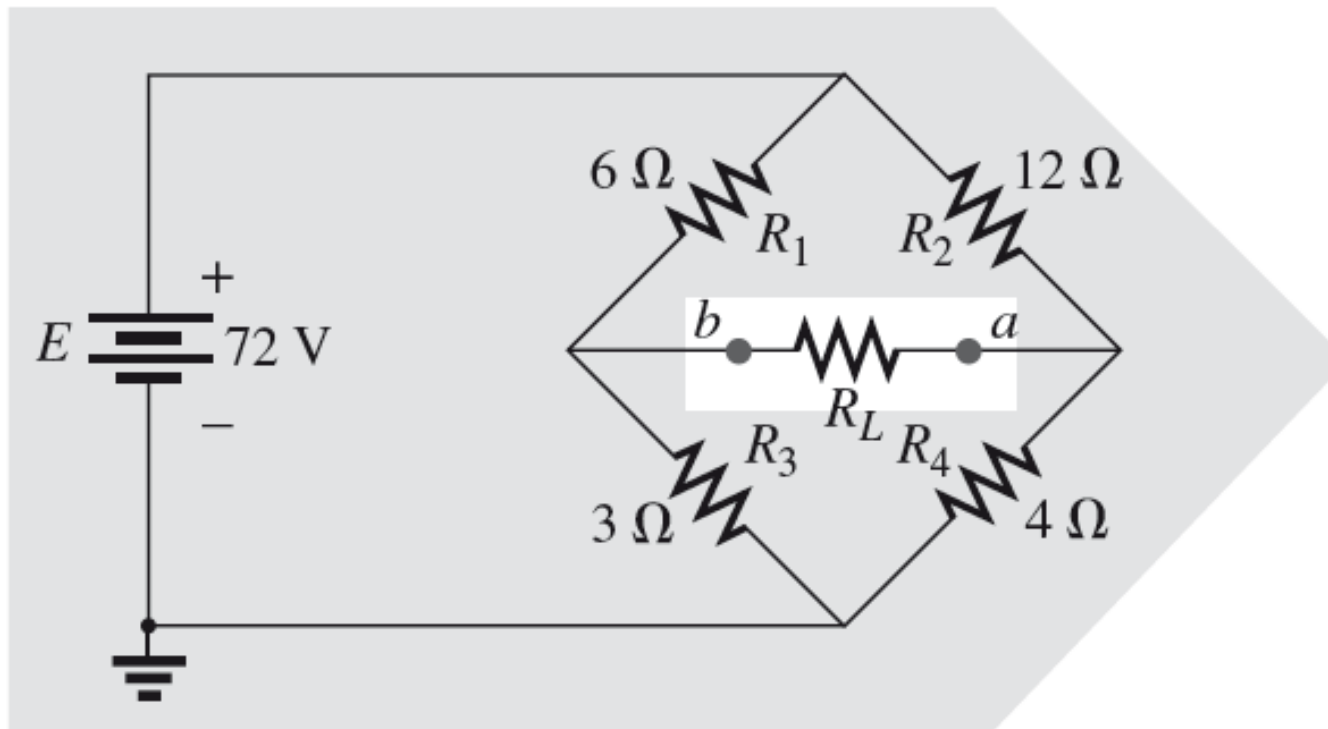


Figura 9.43 Exemplo 9.9.

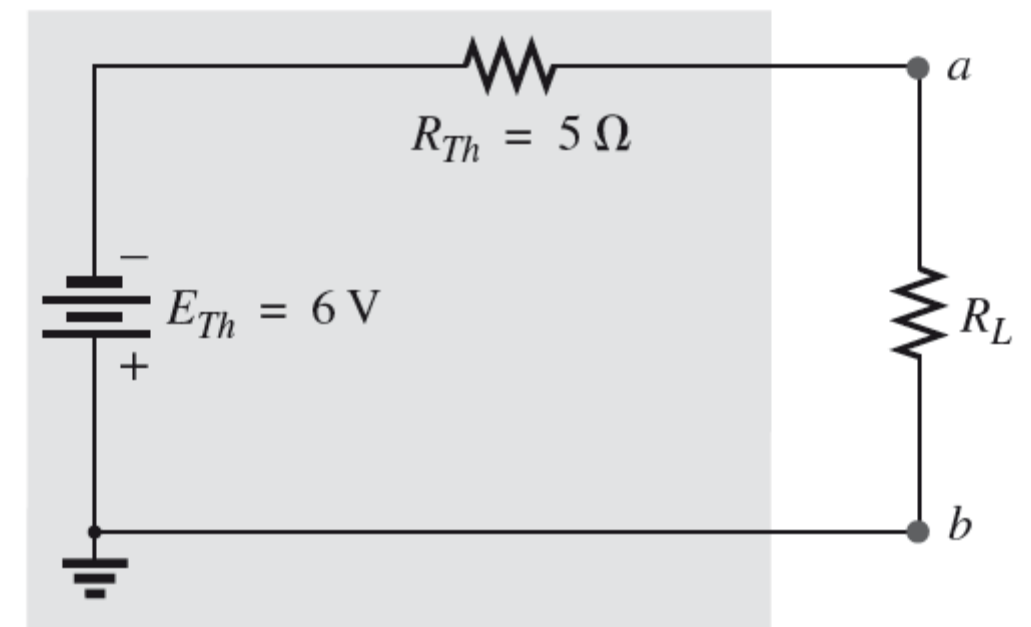


Figura 9.47 Substituição do circuito externo ao resistor R_L , visto na Figura 9.43, pelo circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

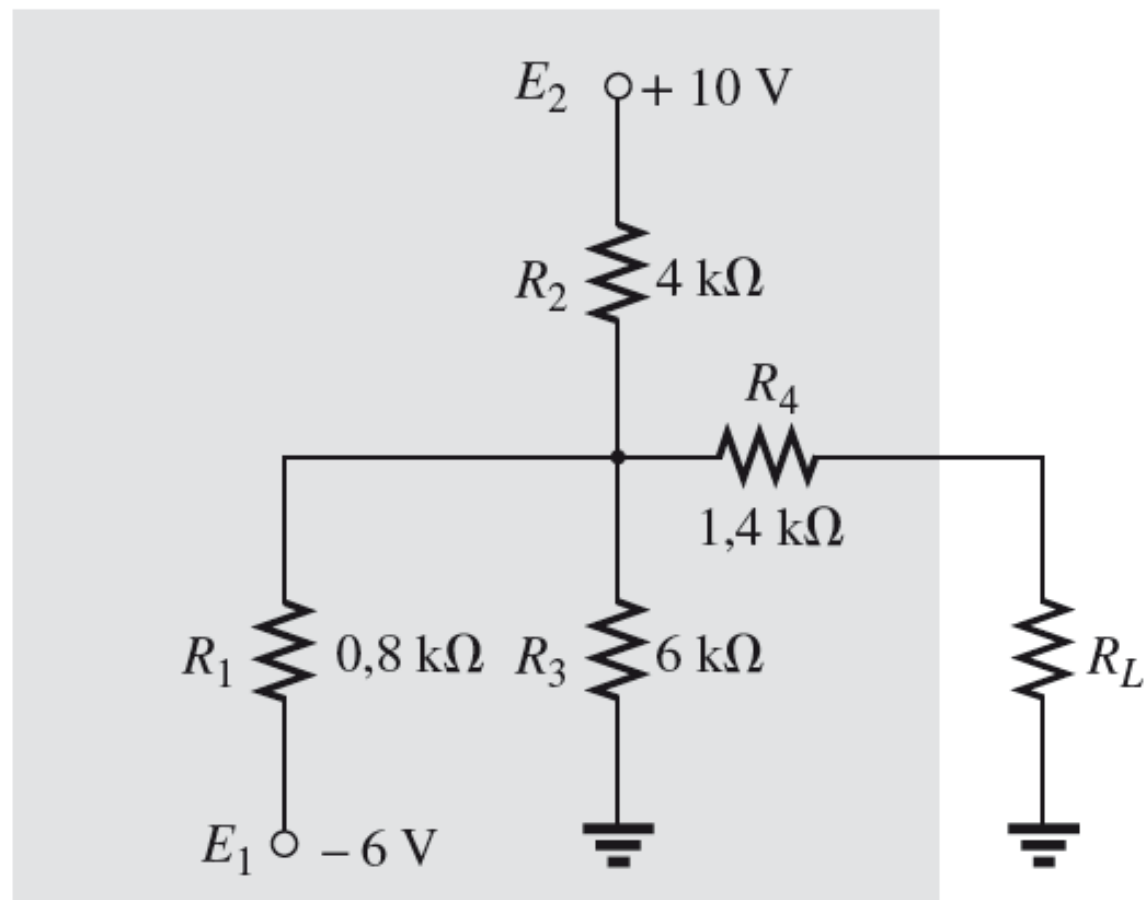


Figura 9.48 Exemplo 9.10.

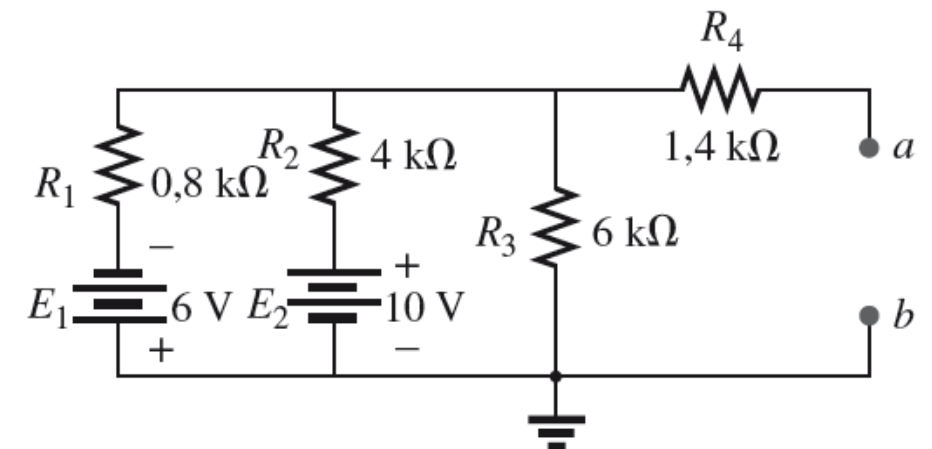


Figura 9.49 Identificação dos terminais de interesse para o circuito da Figura 9.48.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$R_{TH} = R_1 // R_2 // R_3 + R_4$$

$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} + R_4$$

$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{0,8k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{6k}} + 1,4k = 2k\Omega$$

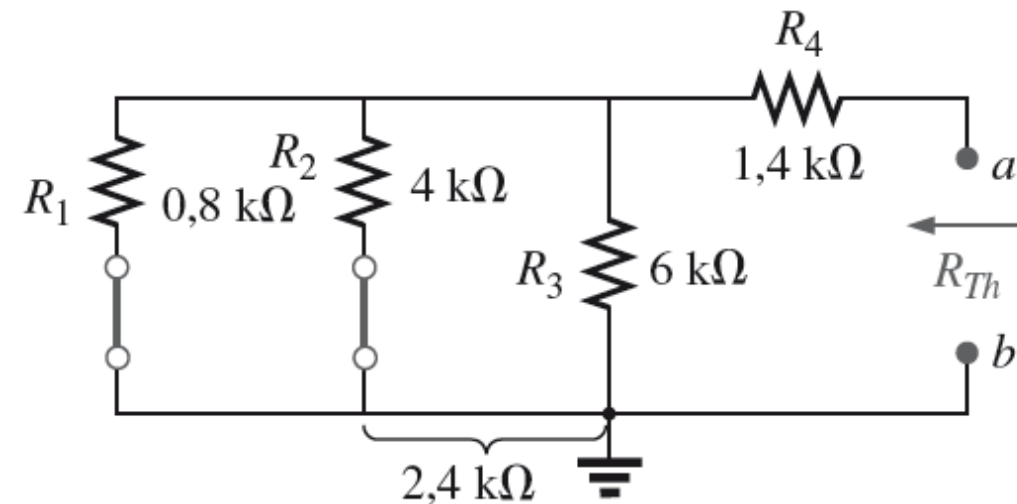


Figura 9.50 Determinação de R_{Th} para o circuito mostrado na Figura 9.49.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$E_{TH}' = E_1 \cdot \frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3}$$

$$E_{TH}' = 6 \cdot \frac{4k // 6k}{0,8k + 4k // 6k}$$

$$E_{TH}' = 6 \cdot \frac{2,4k}{0,8k + 2,4k} = 4,5V$$

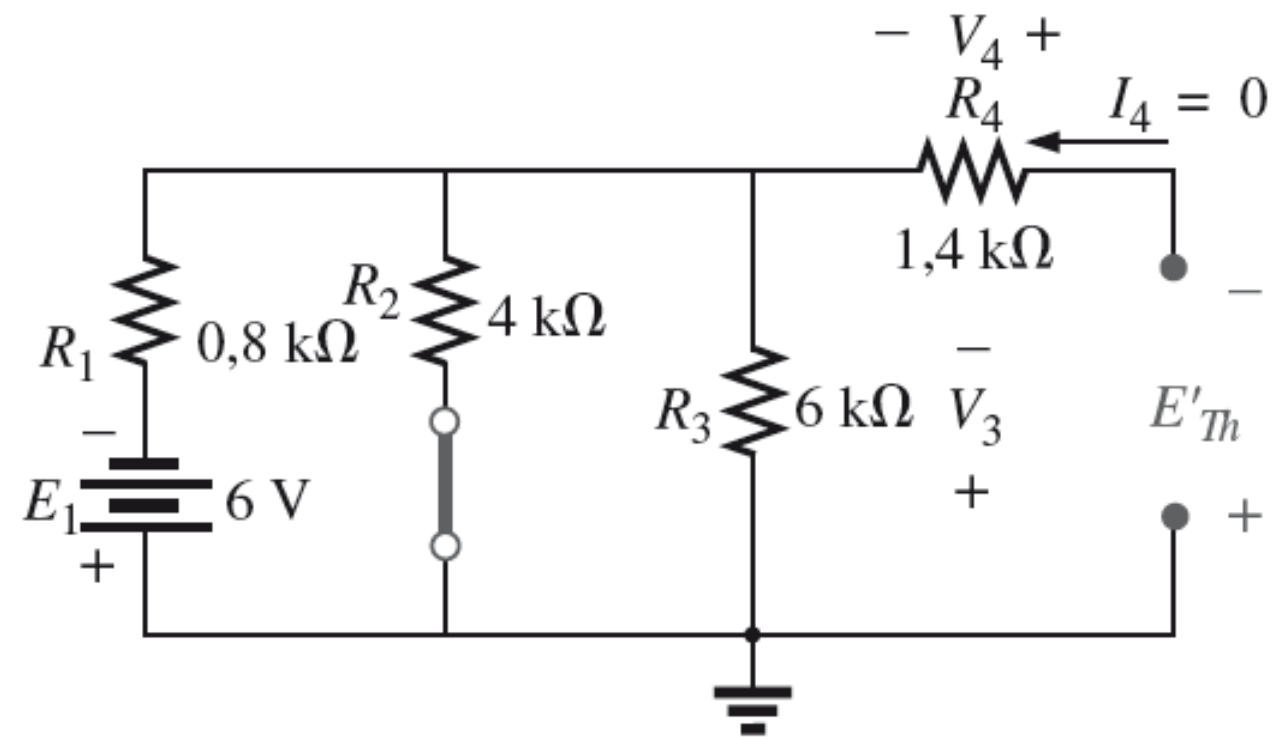


Figura 9.51 Contribuição da fonte E_1 para E_{Th} no circuito mostrado na Figura 9.49.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$E_{TH}'' = E_2 \cdot \frac{R_1 // R_3}{R_2 + R_1 // R_3}$$

$$E_{TH}'' = 10 \cdot \frac{0,8k // 6k}{4k + 0,8k // 6k}$$

$$E_{TH}' = 10 \cdot \frac{0,7k}{4k + 0,7k} \cong 1,5V$$

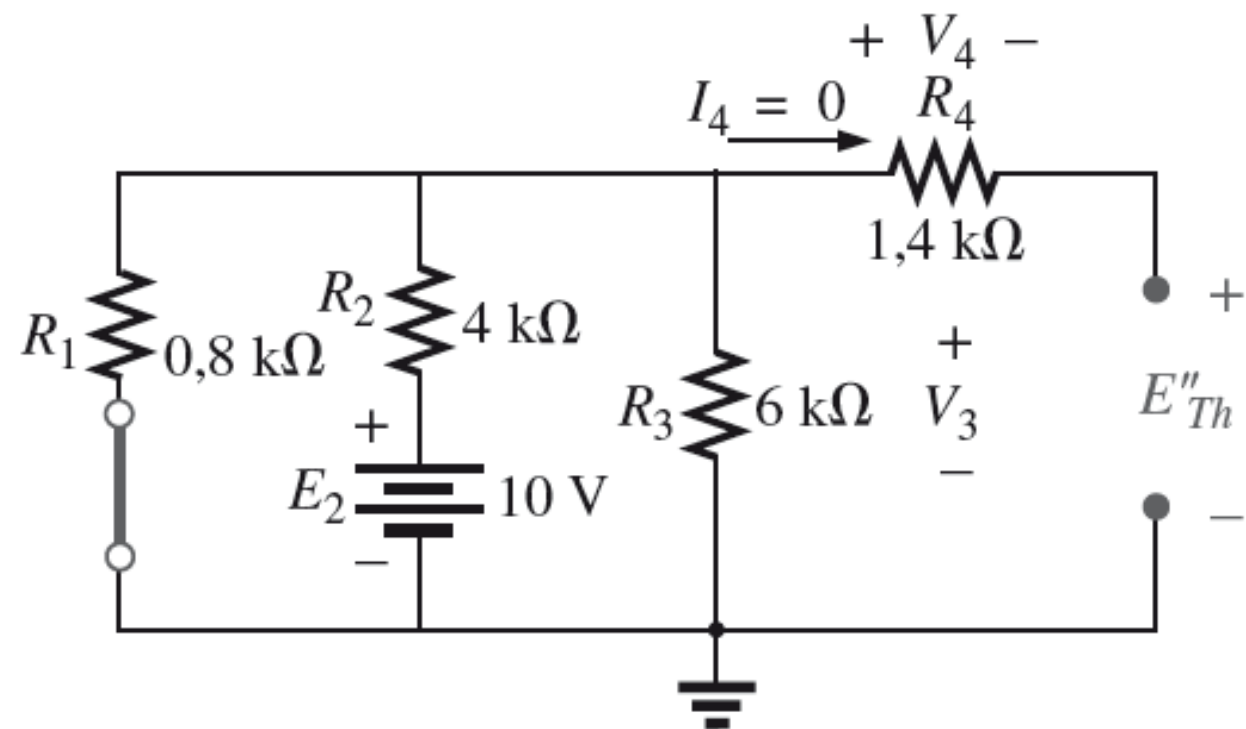


Figura 9.52 Contribuição de E_2 para E_{Th} no circuito da Figura 9.49.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

$$E_{TH} = E_{TH}' - E_{TH}'' = 4,5 - 1,5 = 3V$$

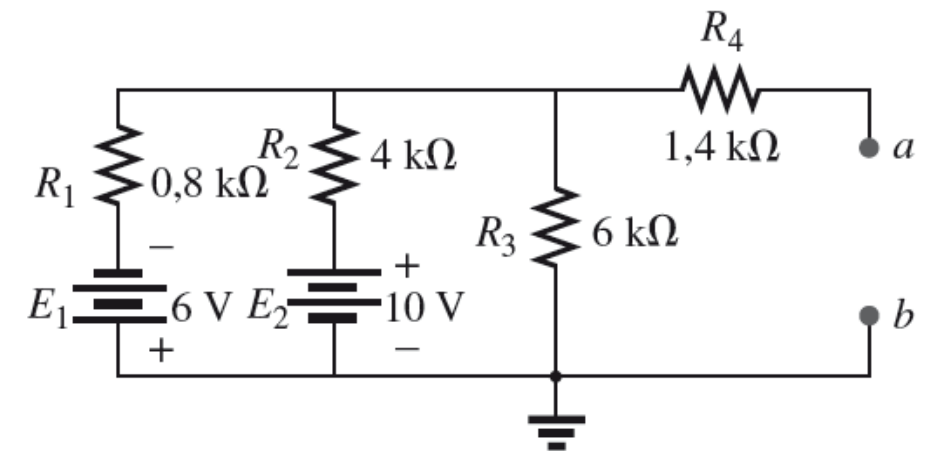


Figura 9.49 Identificação dos terminais de interesse para o circuito da Figura 9.48.

Teorema de Thévenin

Equivalente de Thévenin.

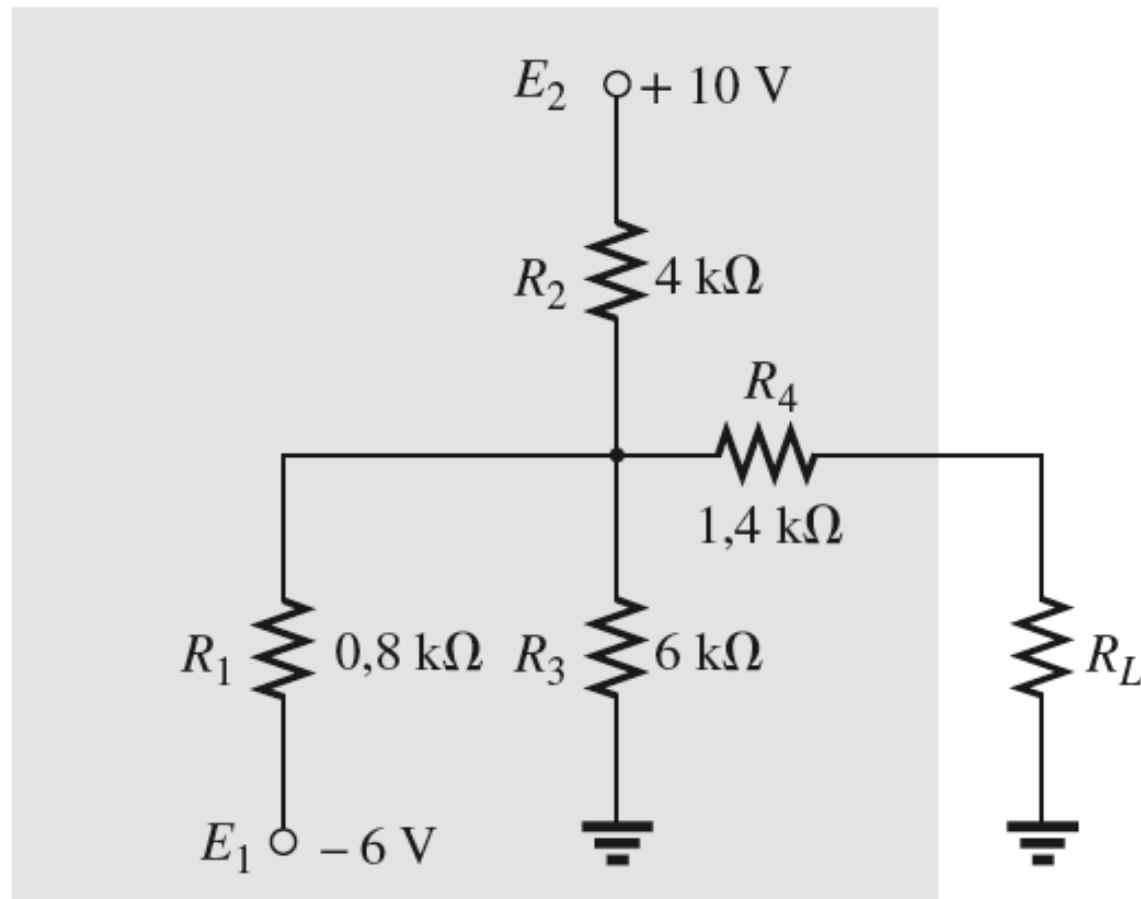


Figura 9.48 Exemplo 9.10.

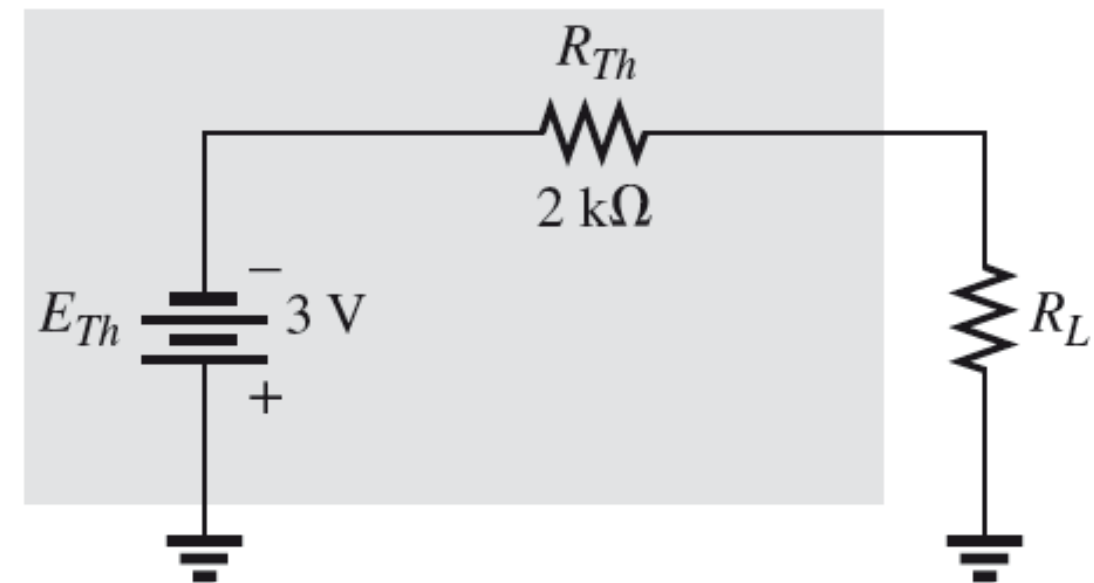


Figura 9.53 Substituição do circuito externo ao resistor R_L da Figura 9.48 pelo circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Medição dos elementos do circuito equivalente de Thévenin.

A tensão de Thévenin é medida nos terminais de interesse do circuito.

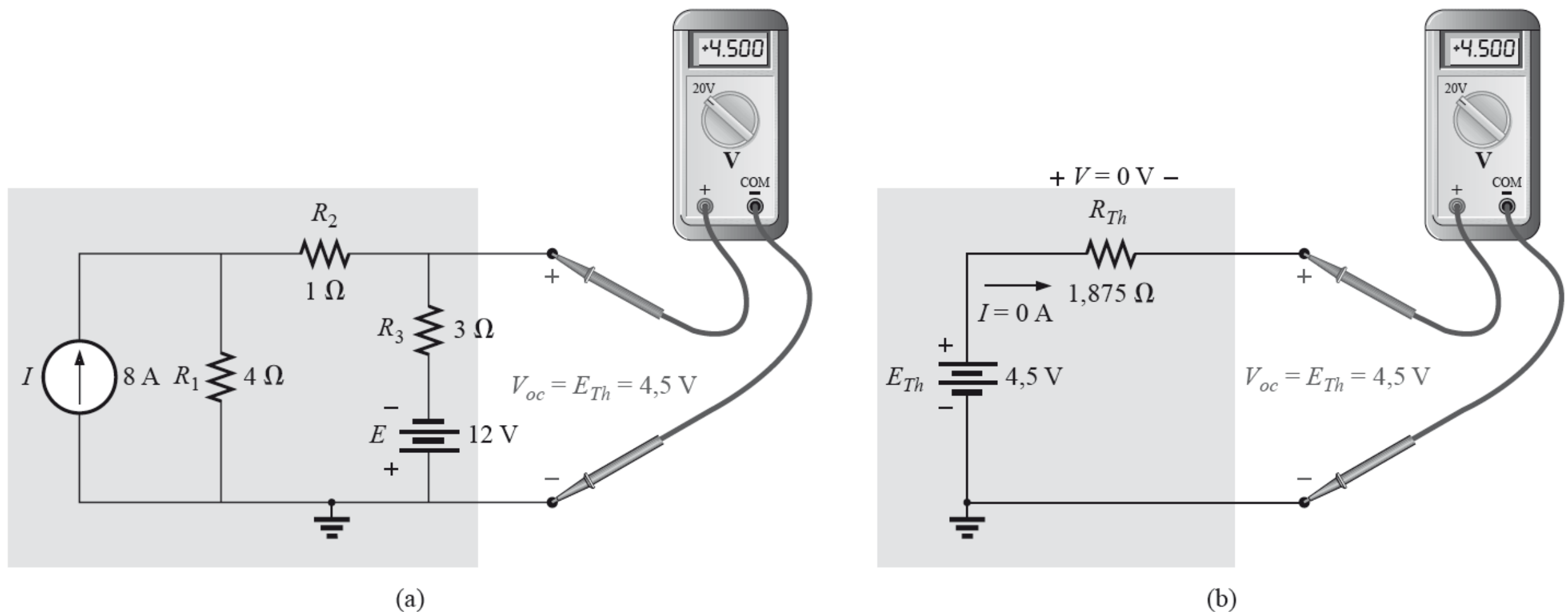


Figura 9.54 Medição da tensão de Thévenin usando um voltímetro: (a) circuito real; (b) equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Medição dos elementos do circuito equivalente de Thévenin.

A resistência de Thévenin é medida nos terminais de interesse do circuito com as fontes anuladas.

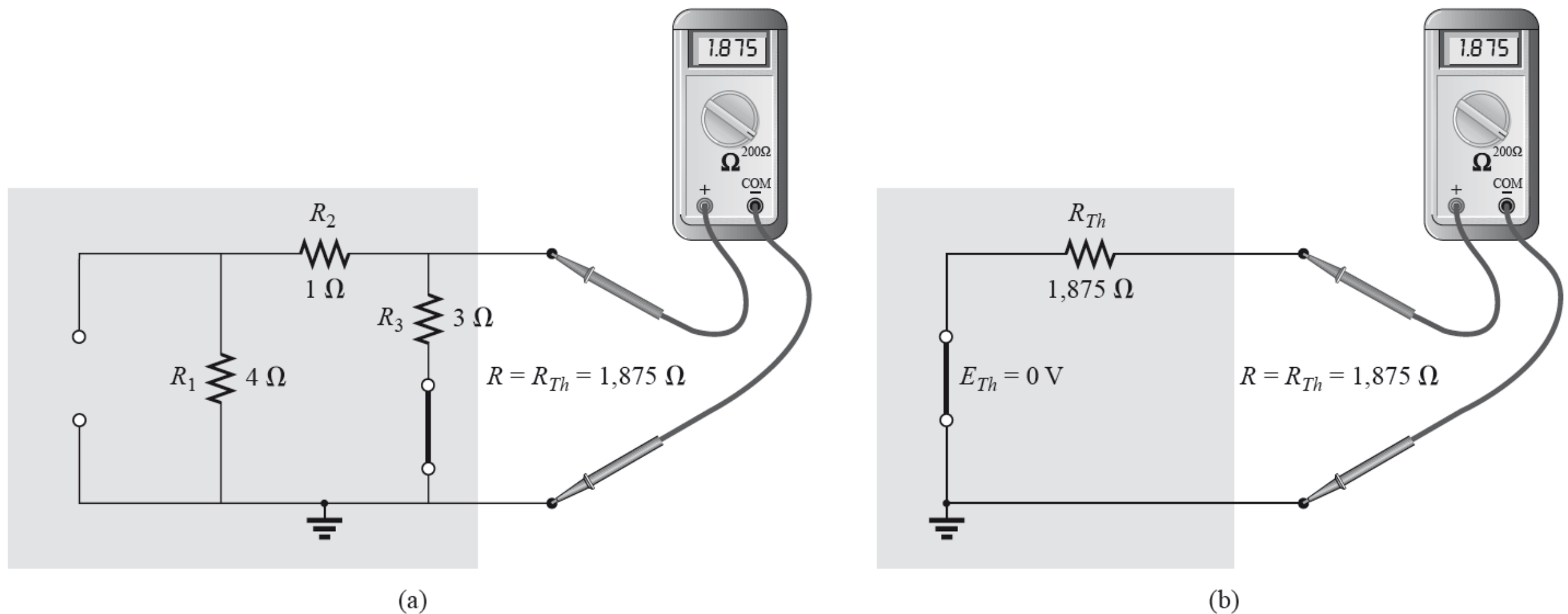


Figura 9.55 Medindo R_{Th} com um ohmímetro: (a) circuito real; (b) equivalente de Thévenin.

Teorema de Thévenin

Medição dos elementos do circuito equivalente de Thévenin.

A resistência do potenciômetro é ajustada para resultar na metade da tensão de Thévenin; assim a resistência de Thévenin é equivalente a resistência do potenciômetro.

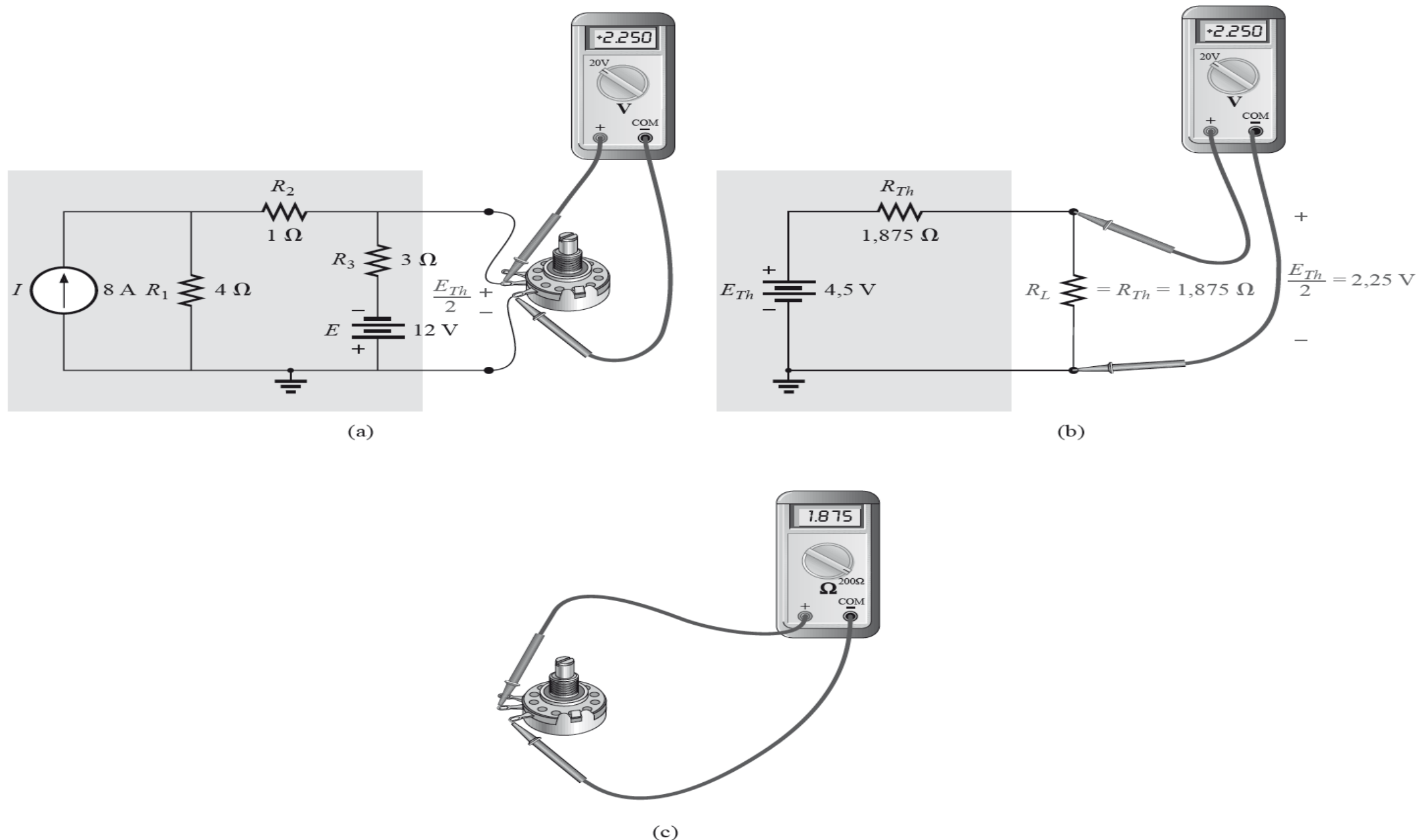


Figura 9.56 Uso de um potenciômetro para determinar R_{Th} : (a) circuito real; (b) equivalente de Thévenin; (c) medição de R_{Th} .

Teorema de Thévenin

Medição dos elementos do circuito equivalente de Thévenin.

$$R_{TH} = \frac{V_{Th}}{I_{SC}} \quad R_{TH} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}$$

Medição da corrente de curto-circuito para obter a resistência de Thévenin; e da tensão de circuito aberto para obter a tensão de Thévenin.

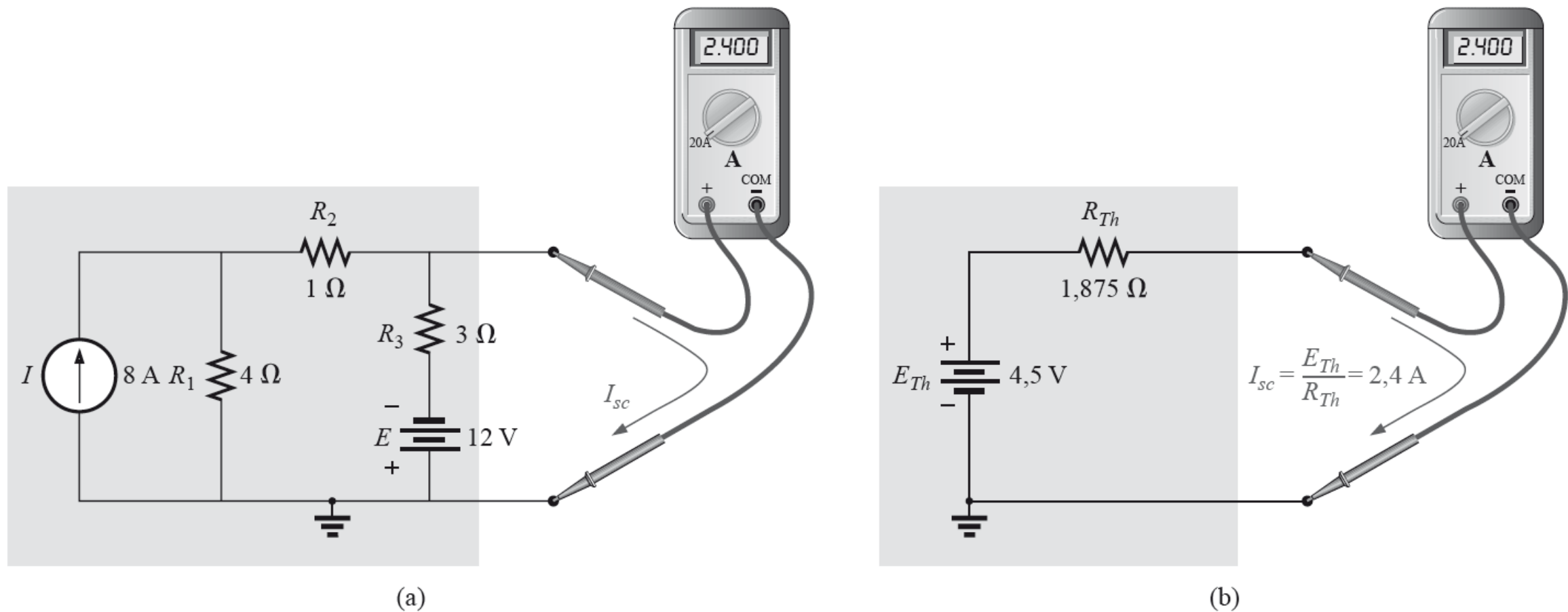


Figura 9.57 Determinação de R_{Th} usando a corrente de curto-circuito: (a) circuito real; (b) equivalente de Thévenin.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton:

- Foi demonstrado no capítulo anterior que, para qualquer fonte de tensão em série, com uma resistência interna, é possível determinar uma fonte de corrente equivalente.
- O circuito com fonte de corrente equivalente pode ser obtido com o auxílio do teorema de Norton. Também pode ser obtido com técnicas de conversão descritas anteriormente.
- O teorema de Norton afirma que:
 - Qualquer circuito de corrente contínua linear bilateral de dois terminais pode ser substituído por um circuito equivalente formado por uma fonte de corrente e por um resistor em paralelo.

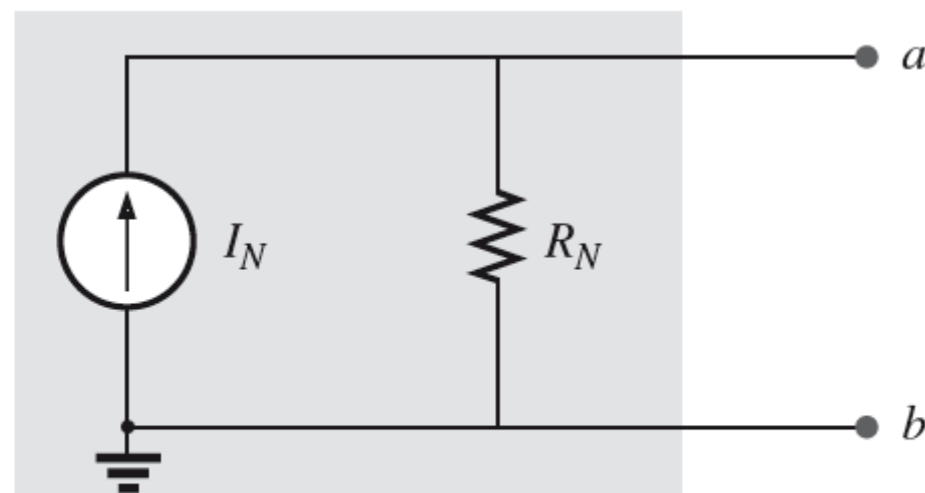


Figura 9.59 Circuito equivalente de Norton.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton:

1. Remova a parte do circuito para a qual deseja obter o equivalente de Norton.
2. Assinale os dois terminais do circuito remanescente.
3. Para calcular R_N , configure todas as fontes em zero (substituindo as fontes de tensão por curtos-circuitos e as fontes de corrente por circuitos abertos) e em seguida determine a resistência equivalente entre os dois terminais assinalados. (Se o circuito original incluir as resistências internas de fontes de tensão e/ ou fontes de correntes, essas resistências devem ser mantidas quando as fontes forem configuradas em zero.) Como $R_N = R_{Th}$, esse passo é idêntico ao que foi descrito quando discutimos o teorema de Thévenin.
4. Para calcular I_N , retorne todas as fontes às suas posições originais e em seguida determine a corrente de curto-circuito entre os dois terminais assinalados. Essa corrente é a mesma que seria medida por um amperímetro conectado entre os terminais assinalados.
5. Desenhe o circuito equivalente de Norton e recoloque entre os terminais do circuito equivalente a parte que foi previamente removida.

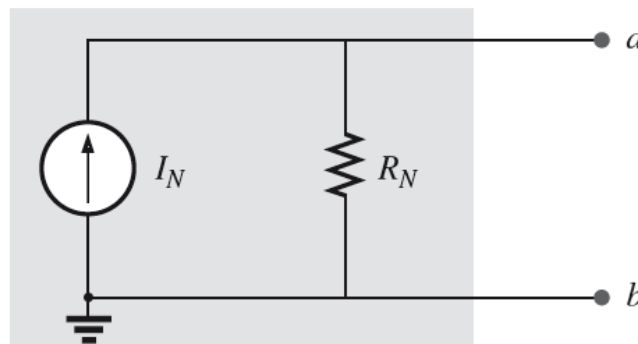


Figura 9.59 Circuito equivalente de Norton.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

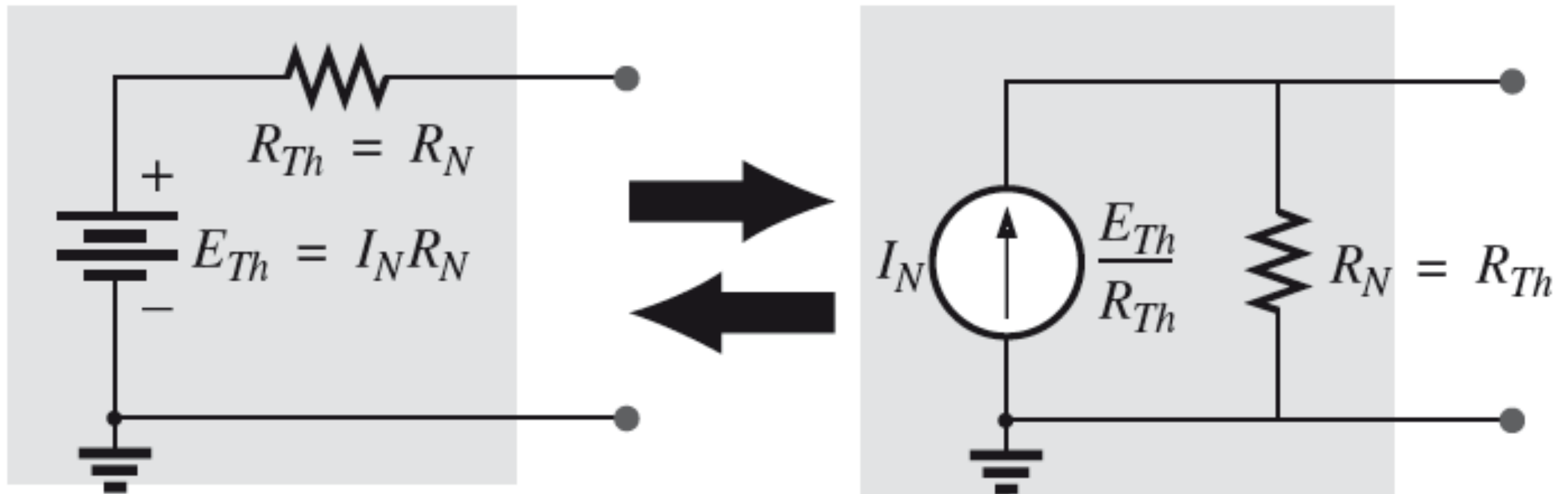


Figura 9.60 Conversão entre os circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

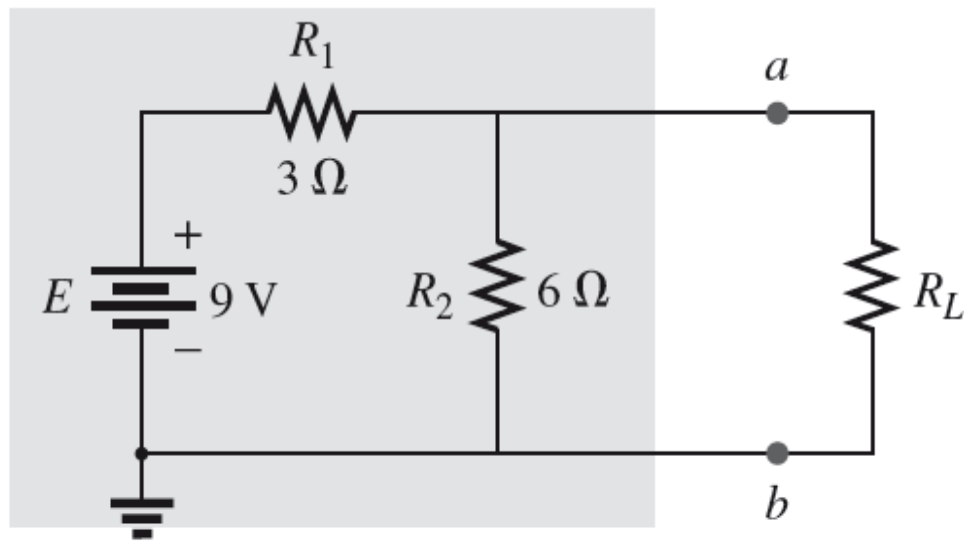


Figura 9.61 Exemplo 9.11.

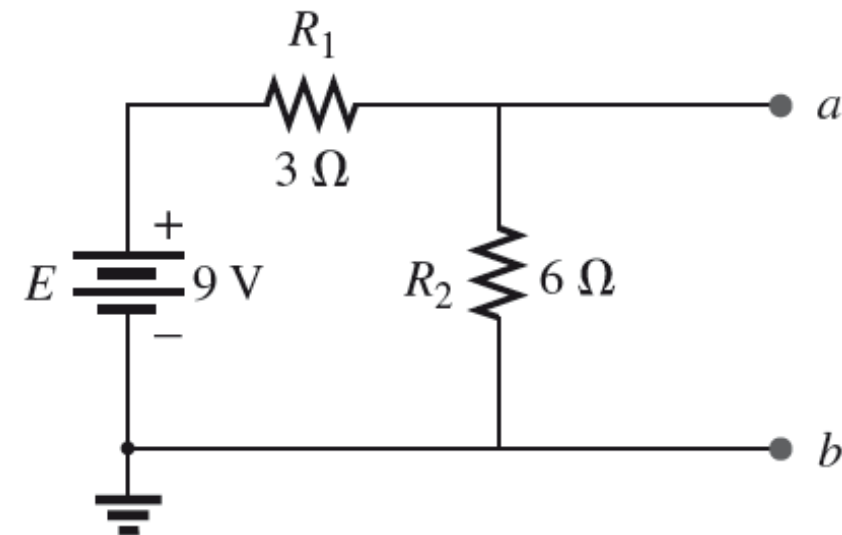


Figura 9.62 Identificação dos terminais de interesse para o circuito mostrado na Figura 9.61.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

$$R_N = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2\Omega$$

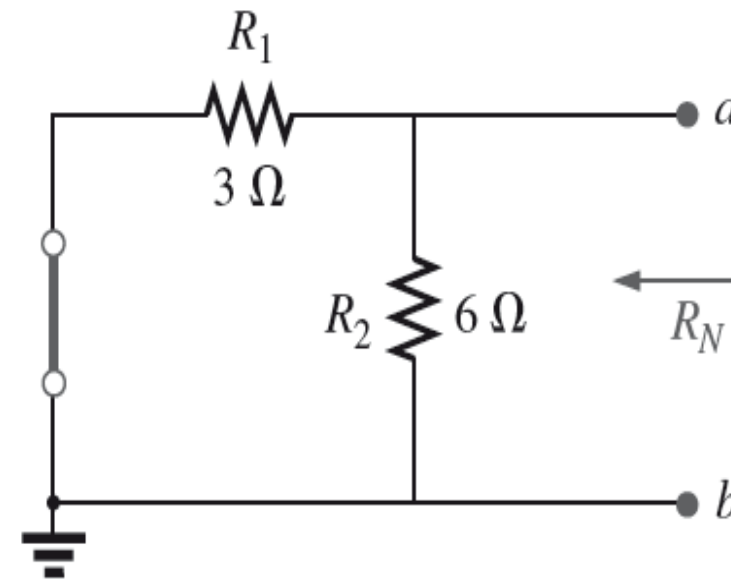


Figura 9.63 Determinação de R_N para o circuito da Figura 9.62.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

$$I_N = \frac{E}{R_1} = \frac{9}{3} = 3A$$

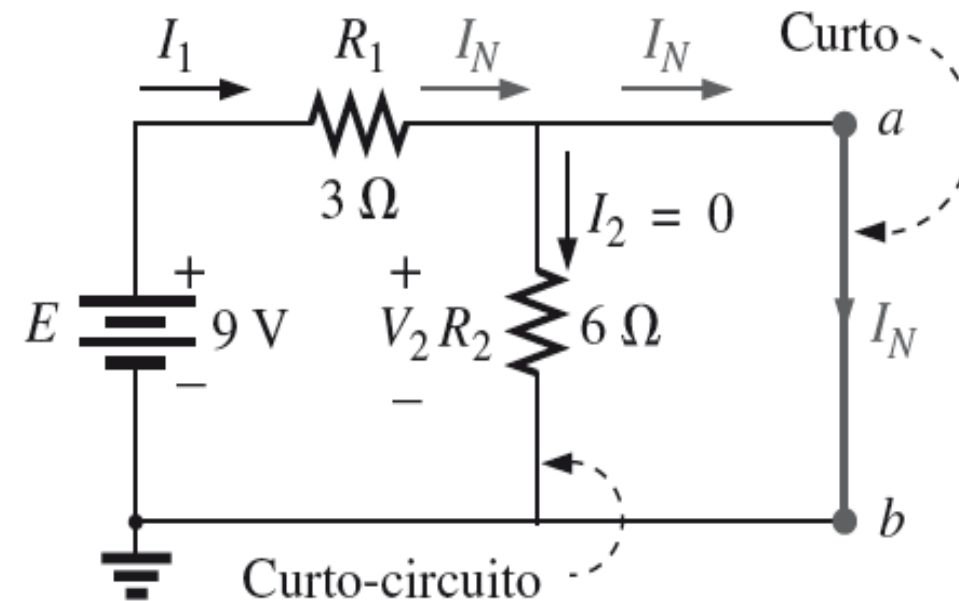


Figura 9.64 Determinação de I_N para o circuito da Figura 9.62.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

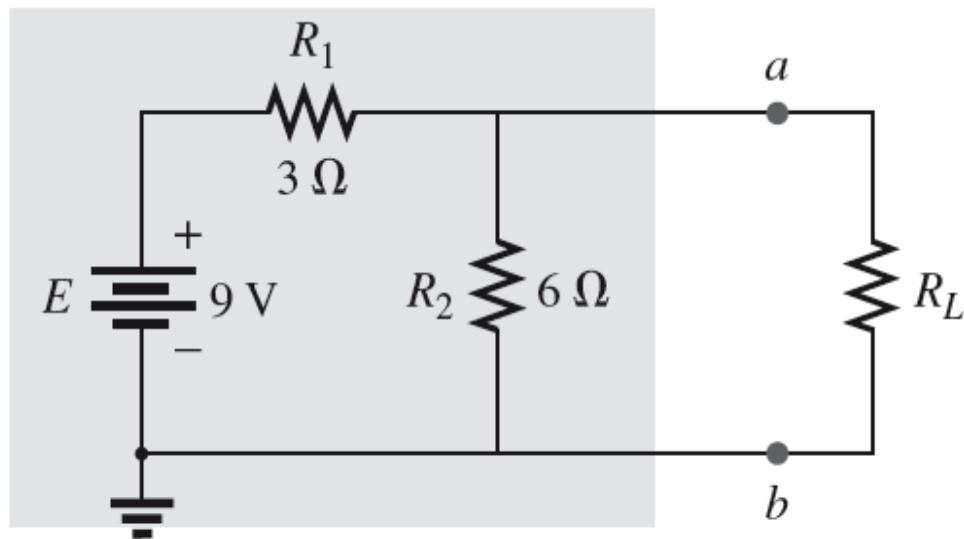


Figura 9.61 Exemplo 9.11.

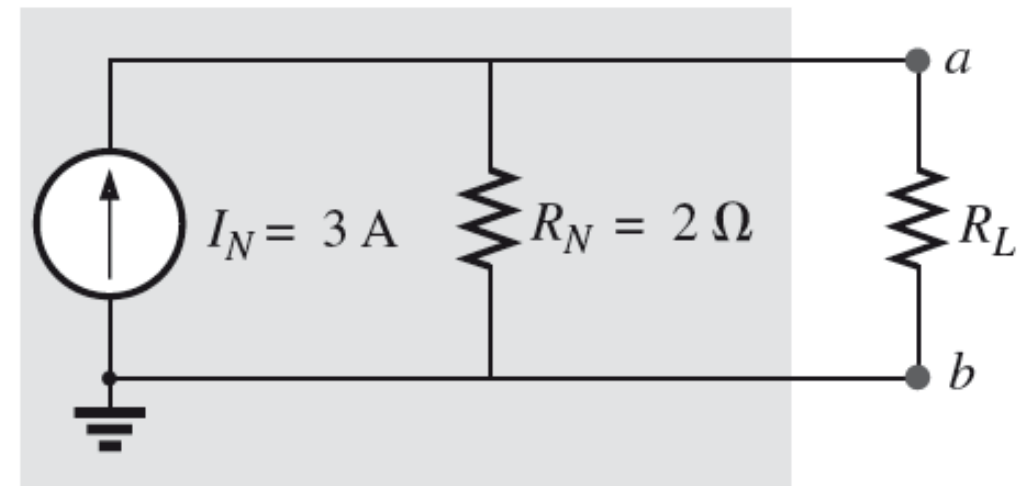


Figura 9.65 Substituição do circuito externo ao resistor R_L na Figura 9.61 pelo circuito equivalente de Norton.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

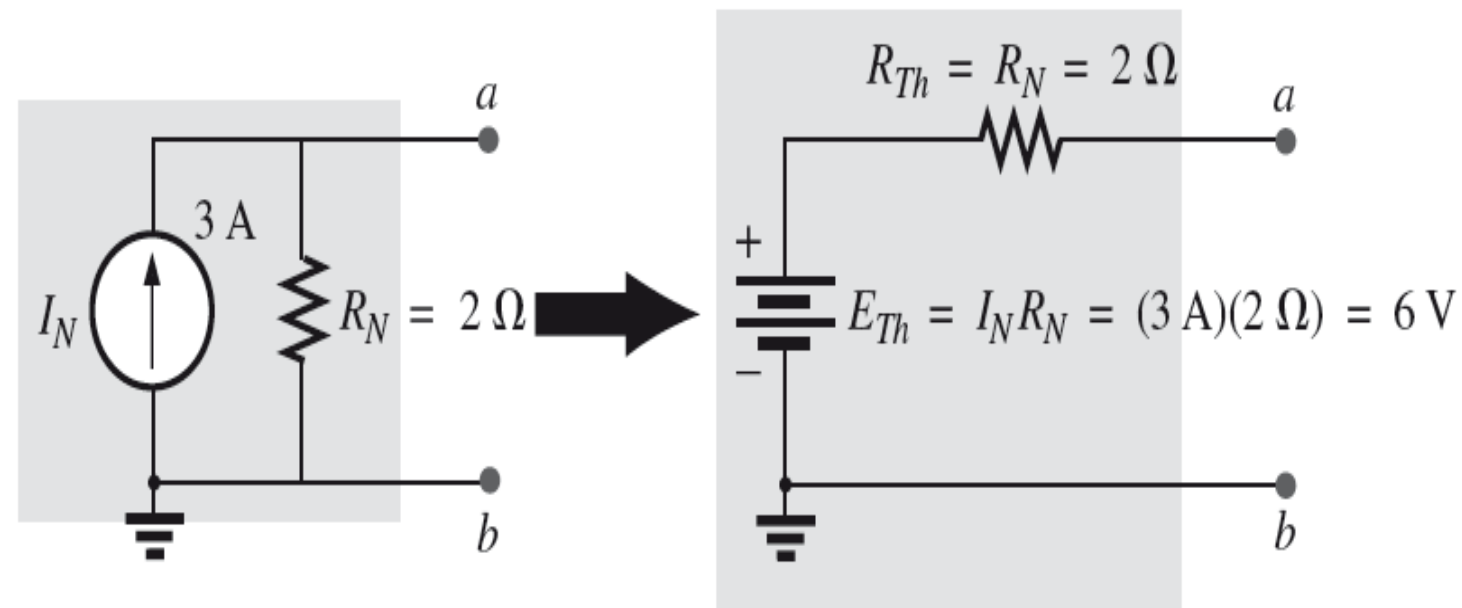


Figura 9.66 Conversão do circuito equivalente de Norton da Figura 9.65 em um circuito equivalente de Thévenin.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

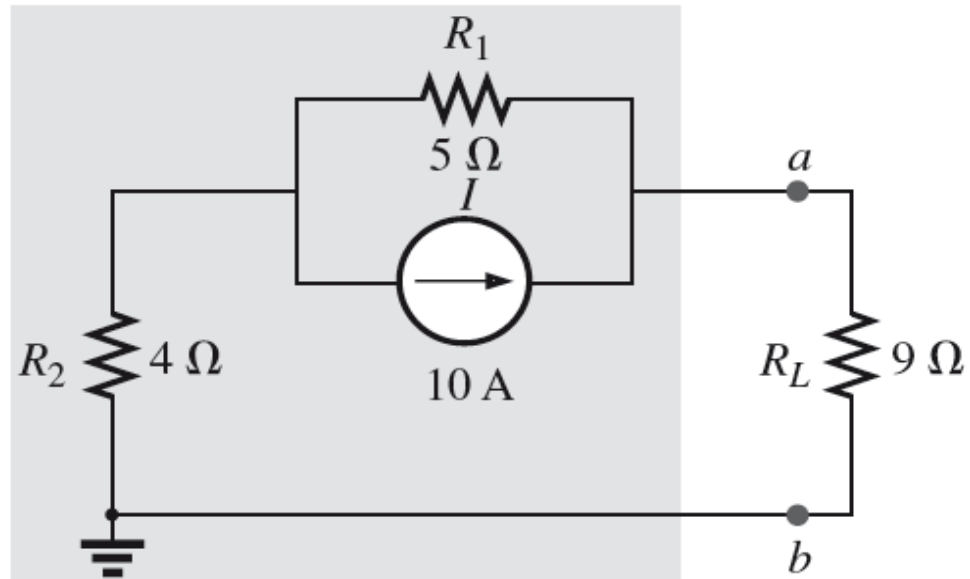


Figura 9.67 Exemplo 9.12.

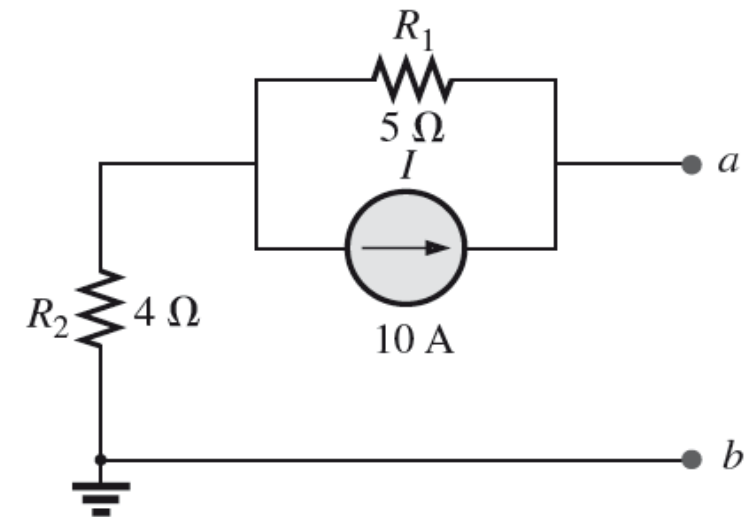


Figura 9.68 Identificação dos terminais de interesse para o circuito mostrado na Figura 9.67.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

$$R_N = R_1 + R_2 = 4 + 5 = 9\Omega$$

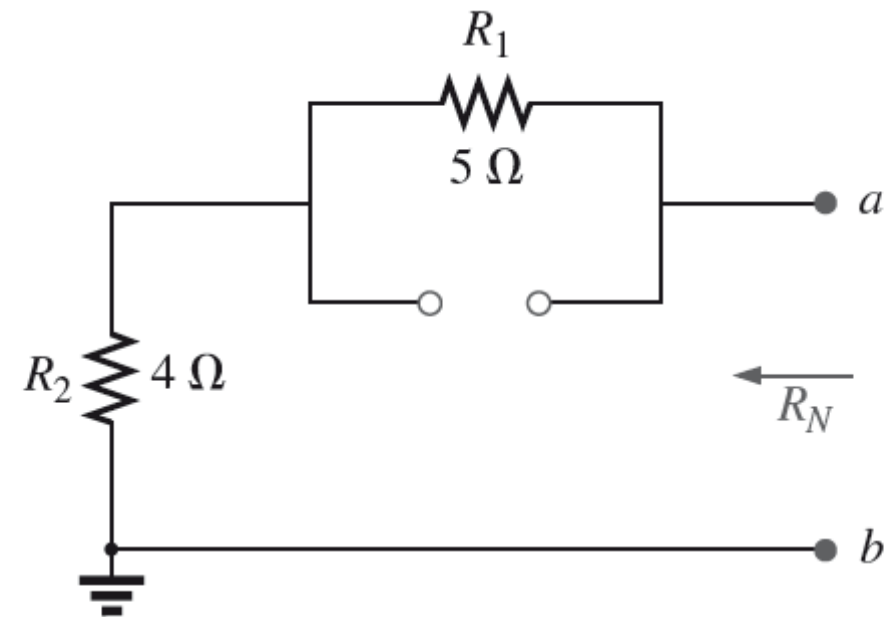


Figura 9.69 Determinação de R_N para o circuito da Figura 9.68.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

$$I_N = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \cdot \frac{5}{5 + 4} = 5,56 A$$

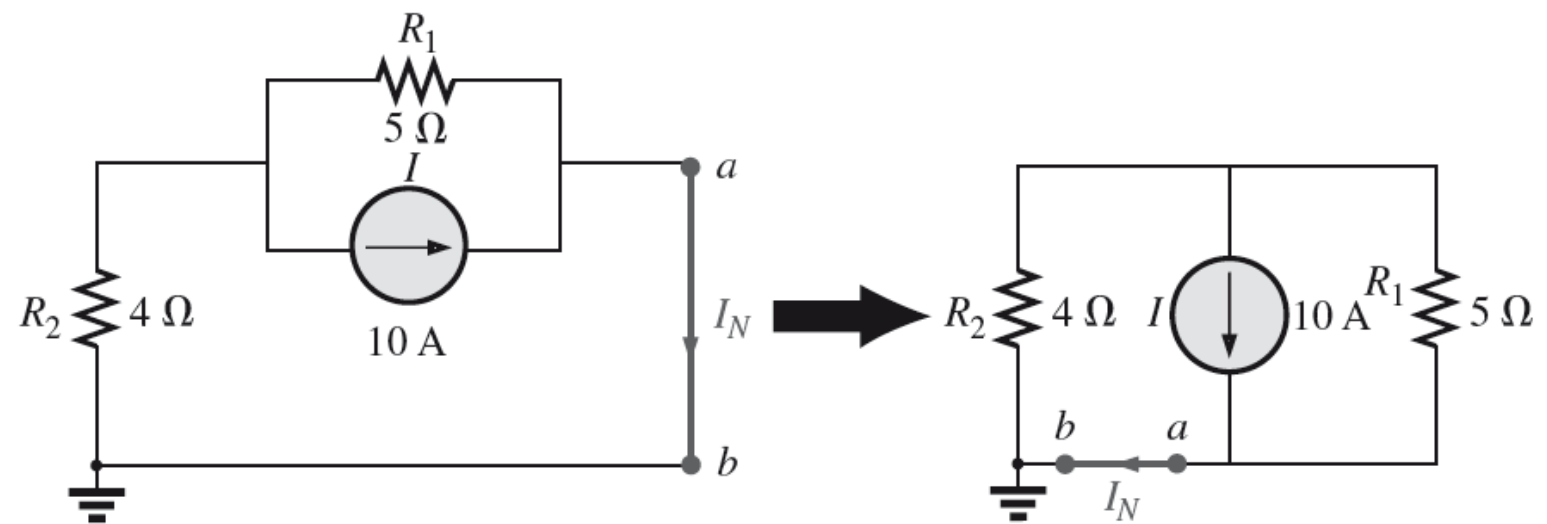


Figura 9.70 Determinação de I_N para o circuito visto na Figura 9.68.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

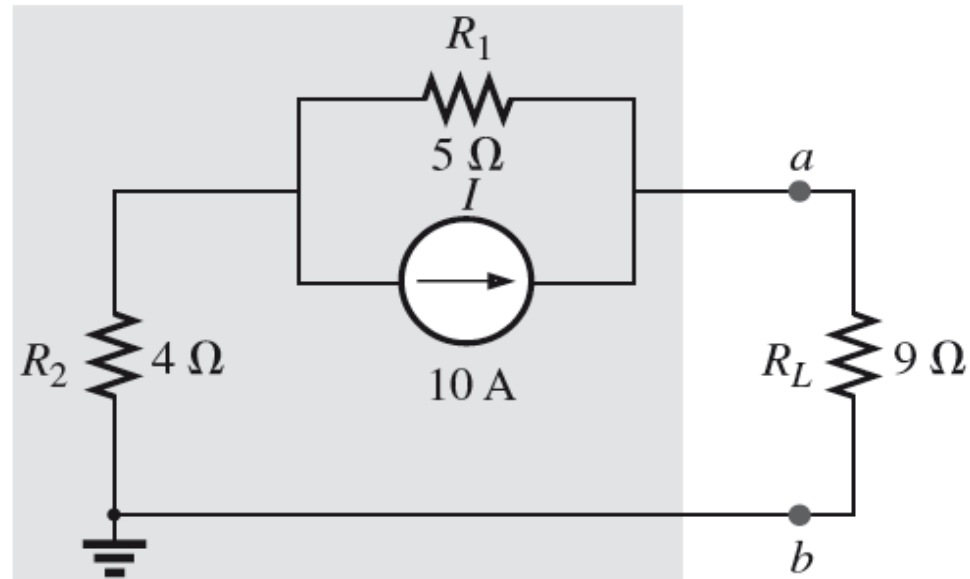


Figura 9.67 Exemplo 9.12.

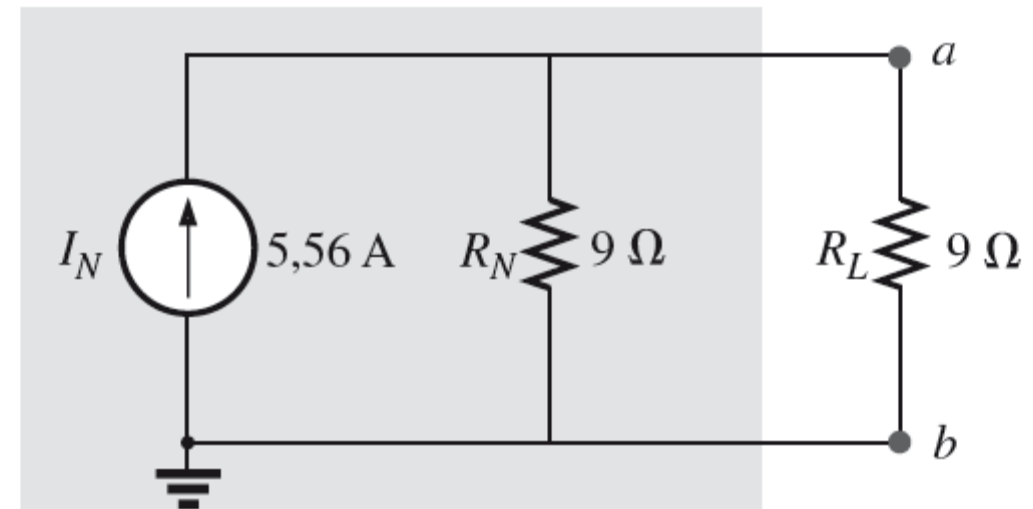


Figura 9.71 Substituição do circuito externo ao resistor R_L visto na Figura 9.67 pelo circuito equivalente de Norton.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

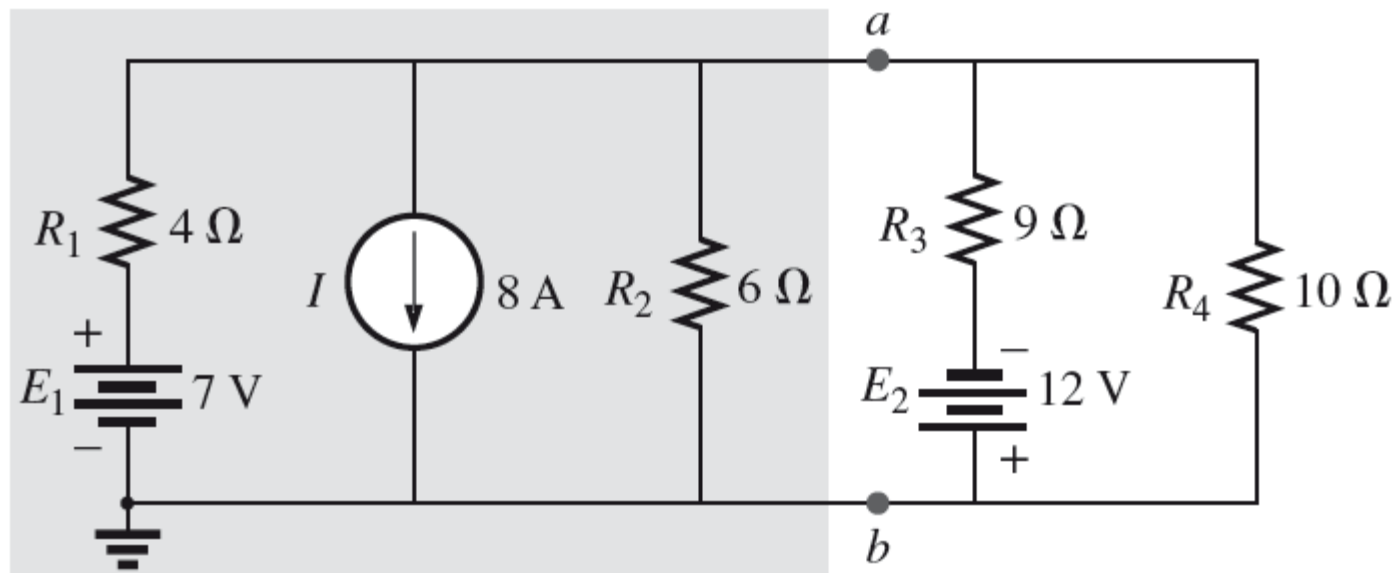


Figura 9.72 Exemplo 9.13.

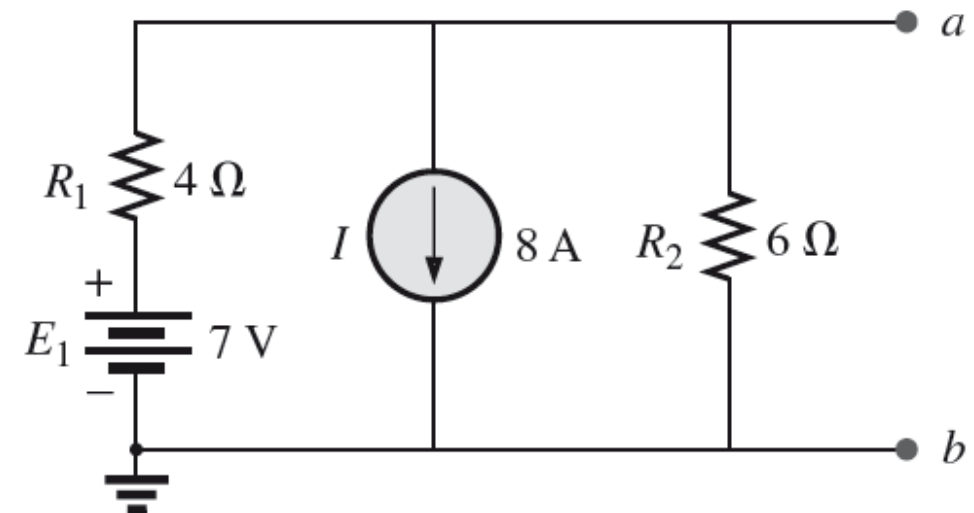


Figura 9.73 Identificação dos terminais de saída do circuito visto na Figura 9.72.

Teorema de Norton

Equivalente de Norton.

$$R_N = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 2,4 \Omega$$

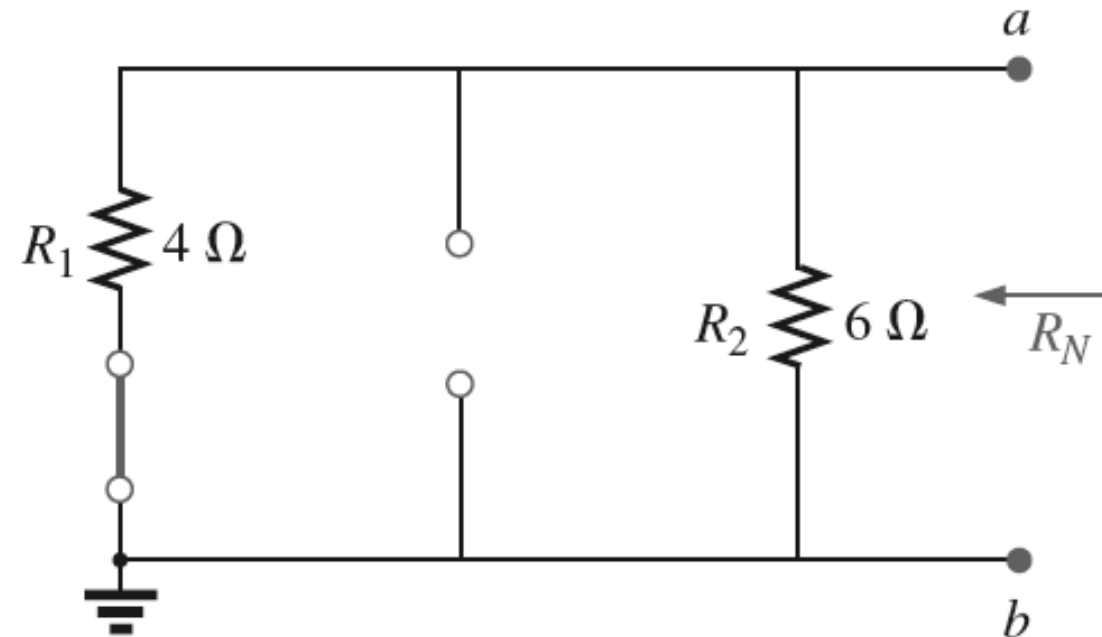


Figura 9.74 Determinação de R_N para o circuito visto na Figura 9.73.

Teorema de Norton

Efeito de E_1 .

$$I_N' = \frac{E_1}{R_1} = \frac{7}{4} = 1,75 A$$

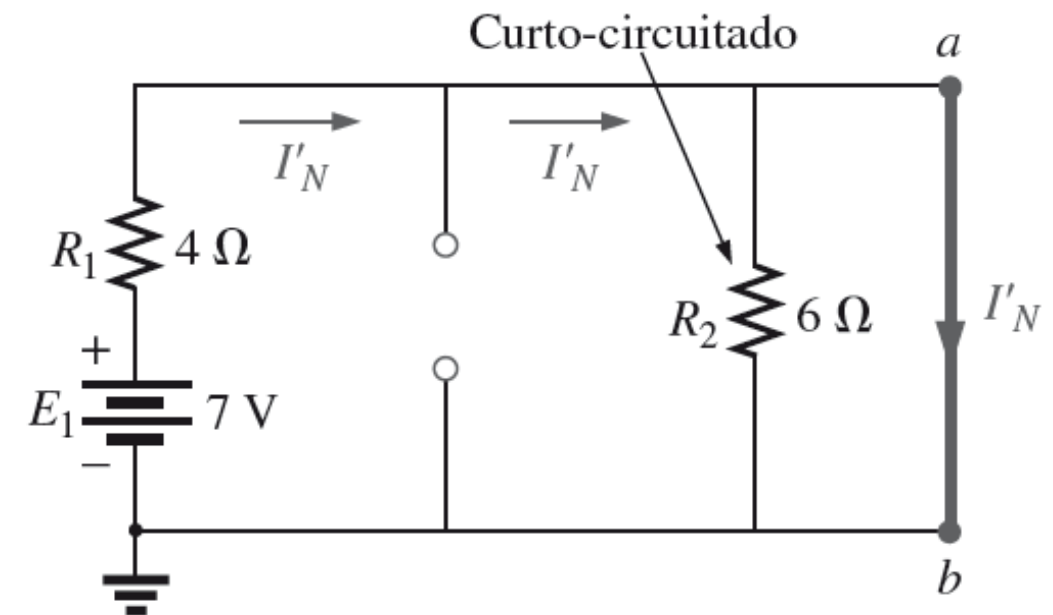


Figura 9.75 Contribuição da fonte de tensão E_1 para I_N .

Teorema de Norton

Efeito de I .

$$I_N'' = I = 8A$$

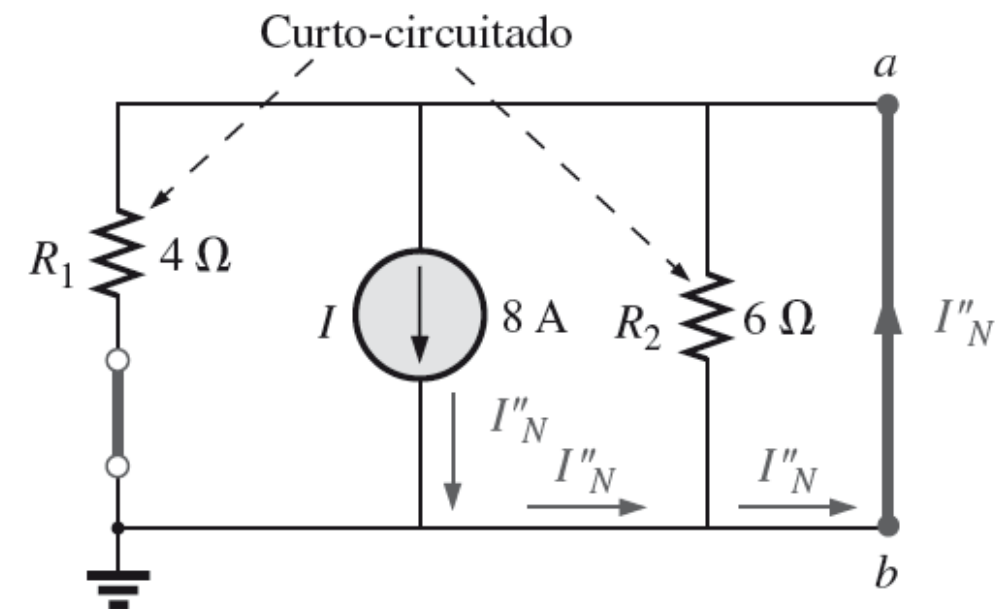


Figura 9.76 Contribuição da fonte de corrente I para I_N .

Teorema de Norton

Efeito total.

$$I_N = I_N'' - I_N' = 8 - 1,75 = 6,25 A$$

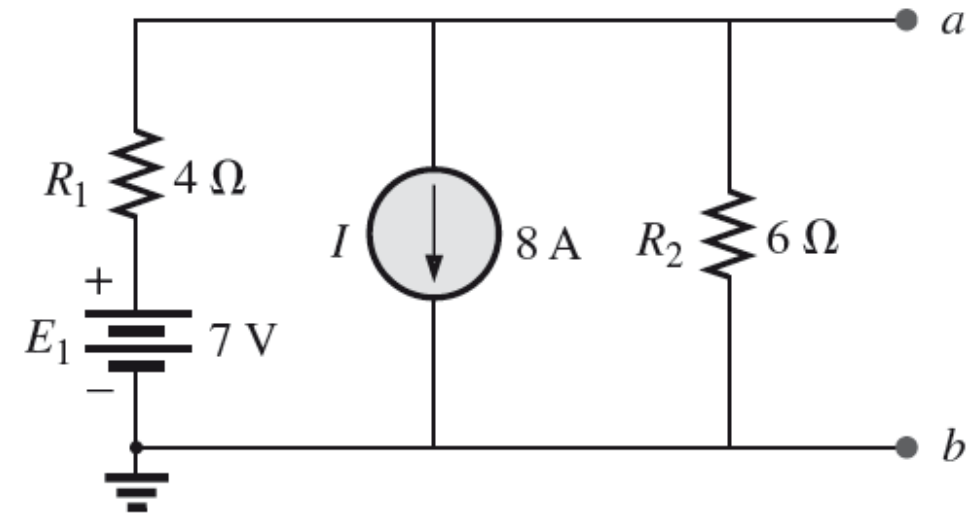


Figura 9.73 Identificação dos terminais de saída do circuito visto na Figura 9.72.

Teorema de Norton

Efeito total.

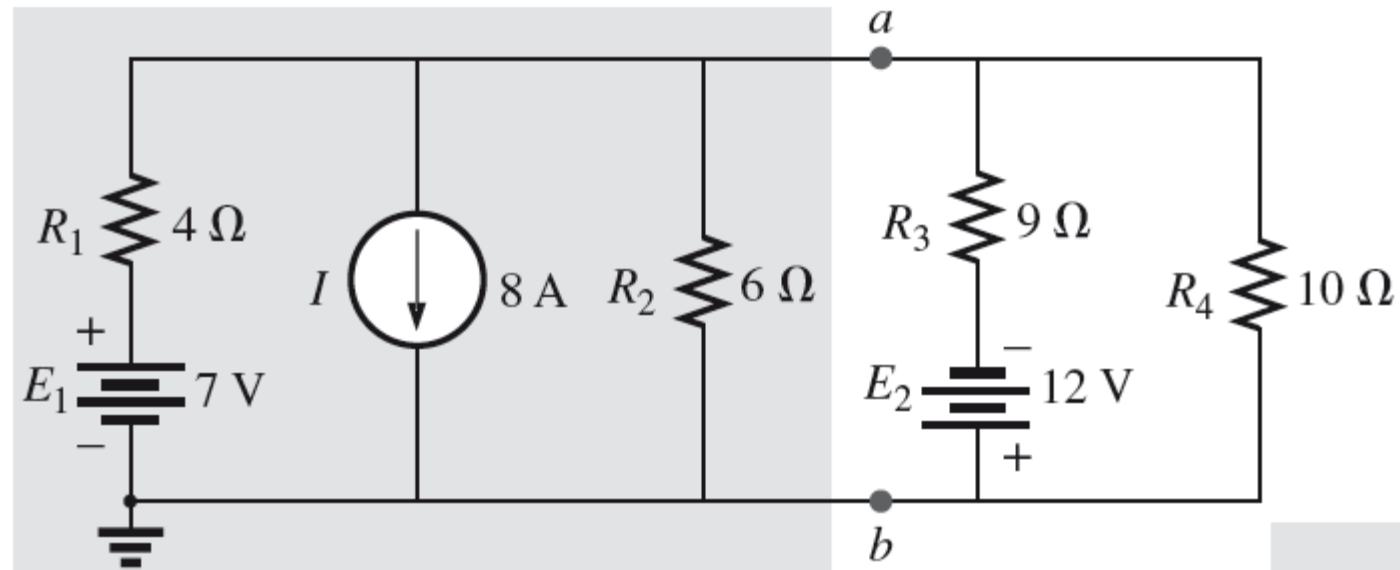


Figura 9.72 Exemplo 9.13.

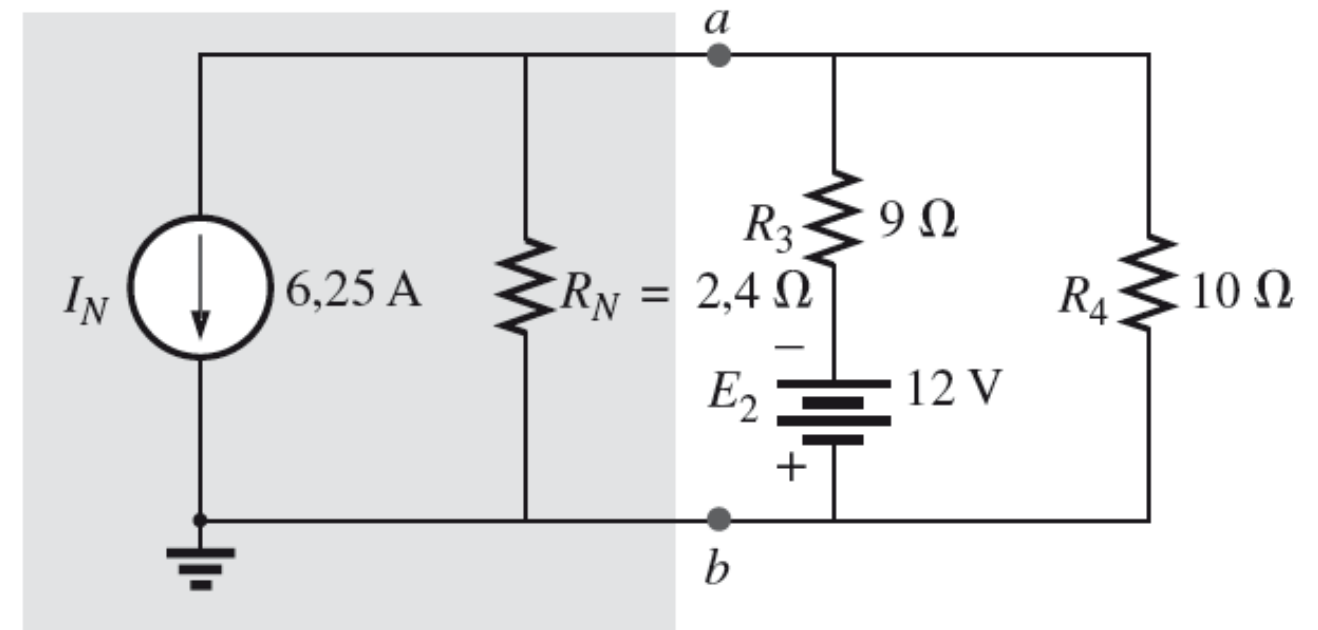


Figura 9.77 Substituição do circuito à esquerda dos terminais a - b na Figura 9.72 pelo circuito equivalente de Norton.

Teorema de Norton

Medição dos elementos do circuito equivalente de Norton:

- A corrente de Norton é medida utilizando a técnica já descrita para medir a corrente de curto-circuito (I_{sc}) no caso do circuito equivalente de Thévenin.
- Como as resistências de Norton e Thévenin são iguais, o mesmo método experimental pode ser usado nos dois casos.

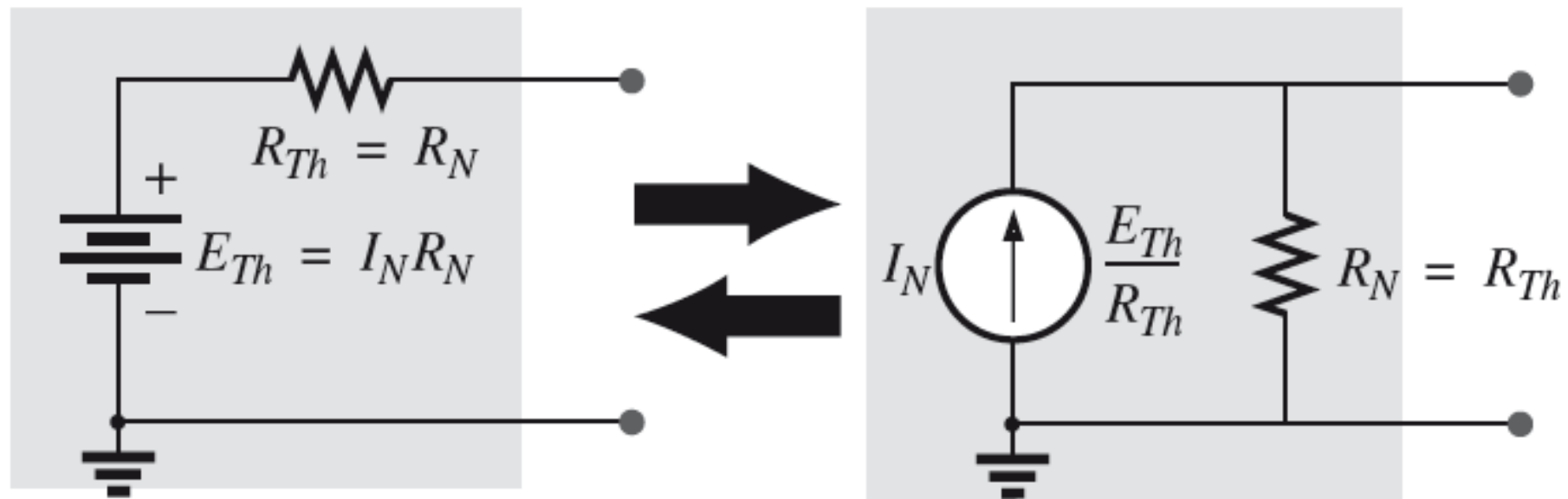


Figura 9.60 Conversão entre os circuitos equivalentes de Norton e de Thévenin.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Máxima transferência de potência:

- Ao se projetar um circuito, muitas vezes é importante ser capaz de responder a uma das perguntas a seguir:
 - Qual carga deve ser aplicada a um sistema para assegurar que ela esteja recebendo a potência máxima do sistema?
- De maneira contrária,
- Para uma carga em particular, quais condições devem ser impostas sobre a fonte para assegurar que ela vá transferir a máxima potência disponível?

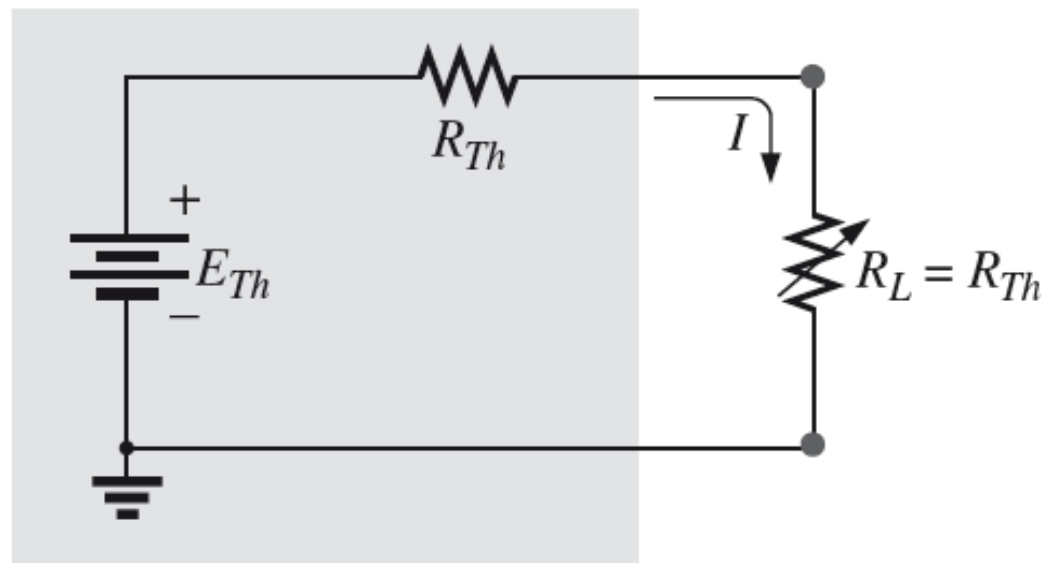


Figura 9.78 Ilustração das condições para máxima transferência de potência a uma carga usando o circuito equivalente de Thévenin.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Máxima transferência de potência.

$$I_L = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{60}{9 + R_L}$$

$$V_L = E_{TH} \cdot \frac{R_L}{R_{TH} + R_L} = 60 \cdot \frac{R_L}{9 + R_L}$$

$$P_L = R_L \cdot I_L^2$$

$$P_L = R_L \cdot \left(\frac{60}{9 + R_L} \right)^2 = \frac{3600 \cdot R_L}{(9 + R_L)^2}$$

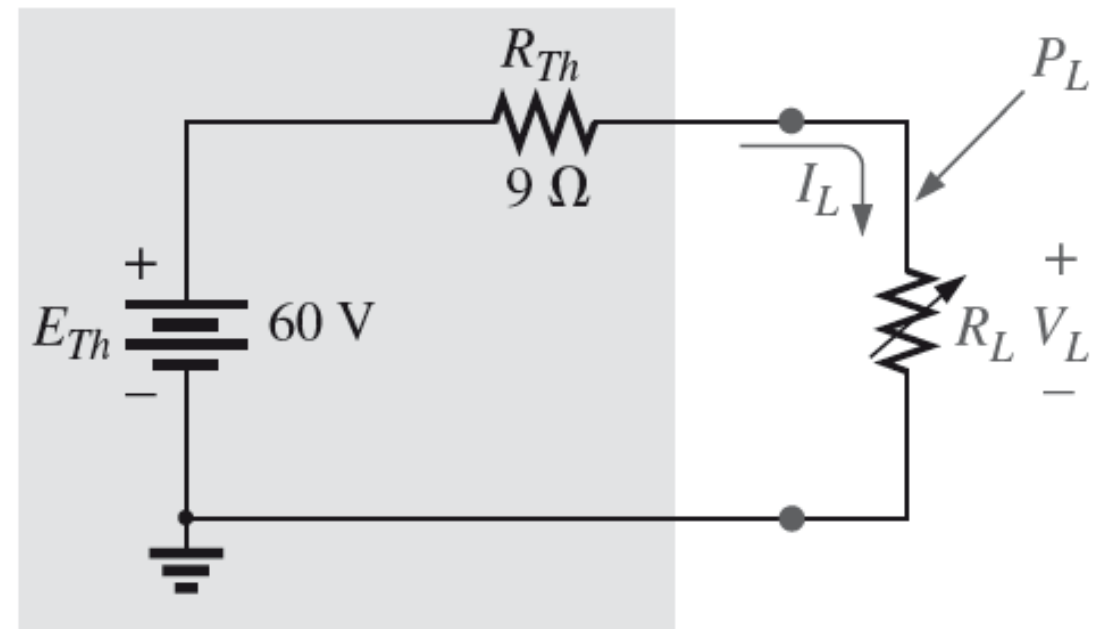


Figura 9.79 Circuito equivalente de Thévenin usado para confirmar a validade do teorema da máxima transferência de potência.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Tabela 9.1

$R_L (\Omega)$	$P_L (W)$		$I_L (A)$		$V_L (V)$
0,1	4,35		6,60		0,66
0,2	8,51		6,52		1,30
0,5	19,94		6,32		3,16
1	36,00		6,00		6,00
2	59,50		5,46		10,91
3	75,00		5,00		15,00
4	85,21		4,62		18,46
5	91,84		4,29		21,43
6	96,00		4,00		24,00
7	98,44	Aumenta	3,75	Diminui	26,25
8	99,65		3,53		28,23
9 (R_{Th})	100,00 (Máximo)		3,33 ($I_{máx}/2$)		30,00 ($E_{Th}/2$)
10	99,72		3,16		31,58
11	99,00		3,00		33,00
12	97,96		2,86		34,29
13	96,69		2,73		35,46
14	95,27		2,61		36,52
15	93,75		2,50		37,50
16	92,16		2,40		38,40
17	90,53		2,31		39,23
18	88,89		2,22		40,00
19	87,24		2,14		40,71
20	85,61		2,07		41,38
25	77,86		1,77		44,12
30	71,00		1,54		46,15
40	59,98		1,22		48,98
100	30,30		0,55		55,05
500	6,95	Diminui	0,12	Diminui	58,94
1000	3,54		0,06		59,47

Teorema da Máxima Transferência de Potência

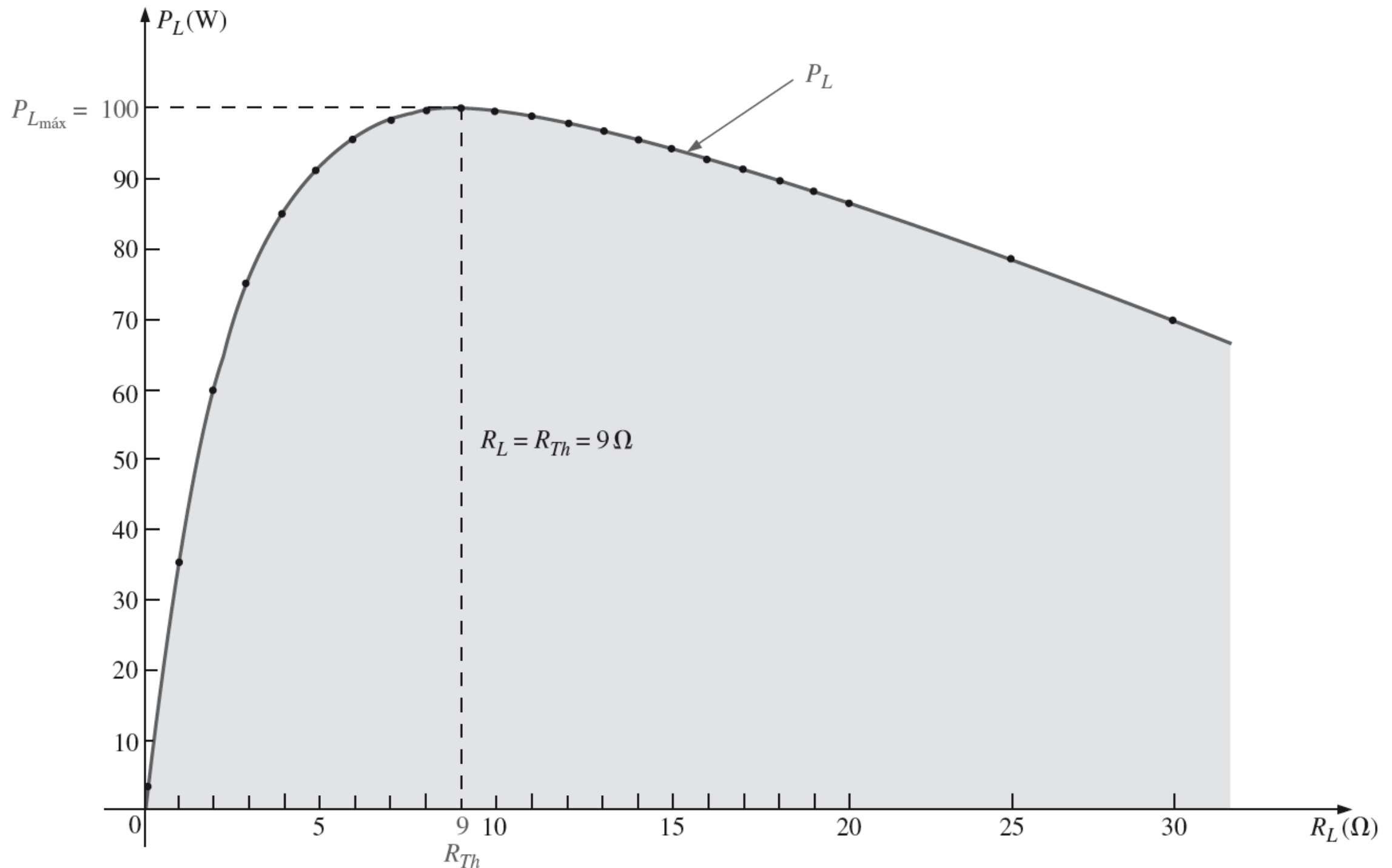


Figura 9.80 P_L em função de R_L para o circuito mostrado na Figura 9.79.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Máxima transferência de potência:

- Se a carga aplicada é menor que a resistência de Thévenin, a potência para a carga cairá rapidamente na medida em que ela fica menor. Entretanto, se a carga aplicada é maior que a resistência de Thévenin, a potência para a carga não cairá tão rapidamente na medida em que ela aumenta.

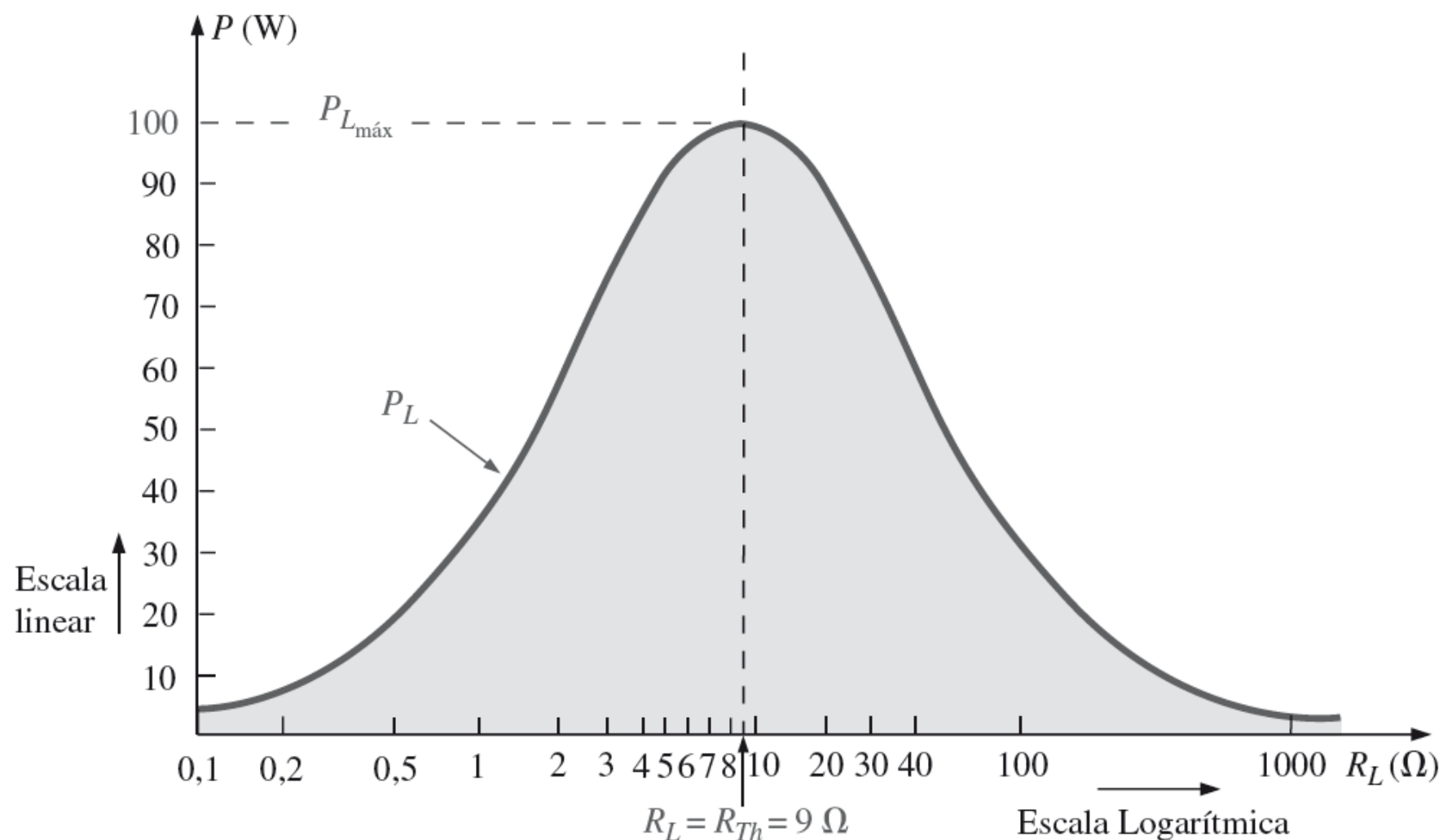


Figura 9.81 P_L em função de R_L para o circuito na Figura 9.79.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Máxima transferência de potência:

- A potência total fornecida por uma fonte como E_{Th} é absorvida tanto pela resistência equivalente de Thévenin quanto pela resistência da carga. Qualquer potência fornecida pela fonte que não chegue à carga é perdida para a resistência de Thévenin.

$$\eta = \frac{P_L}{P_S} \cdot 100\%$$

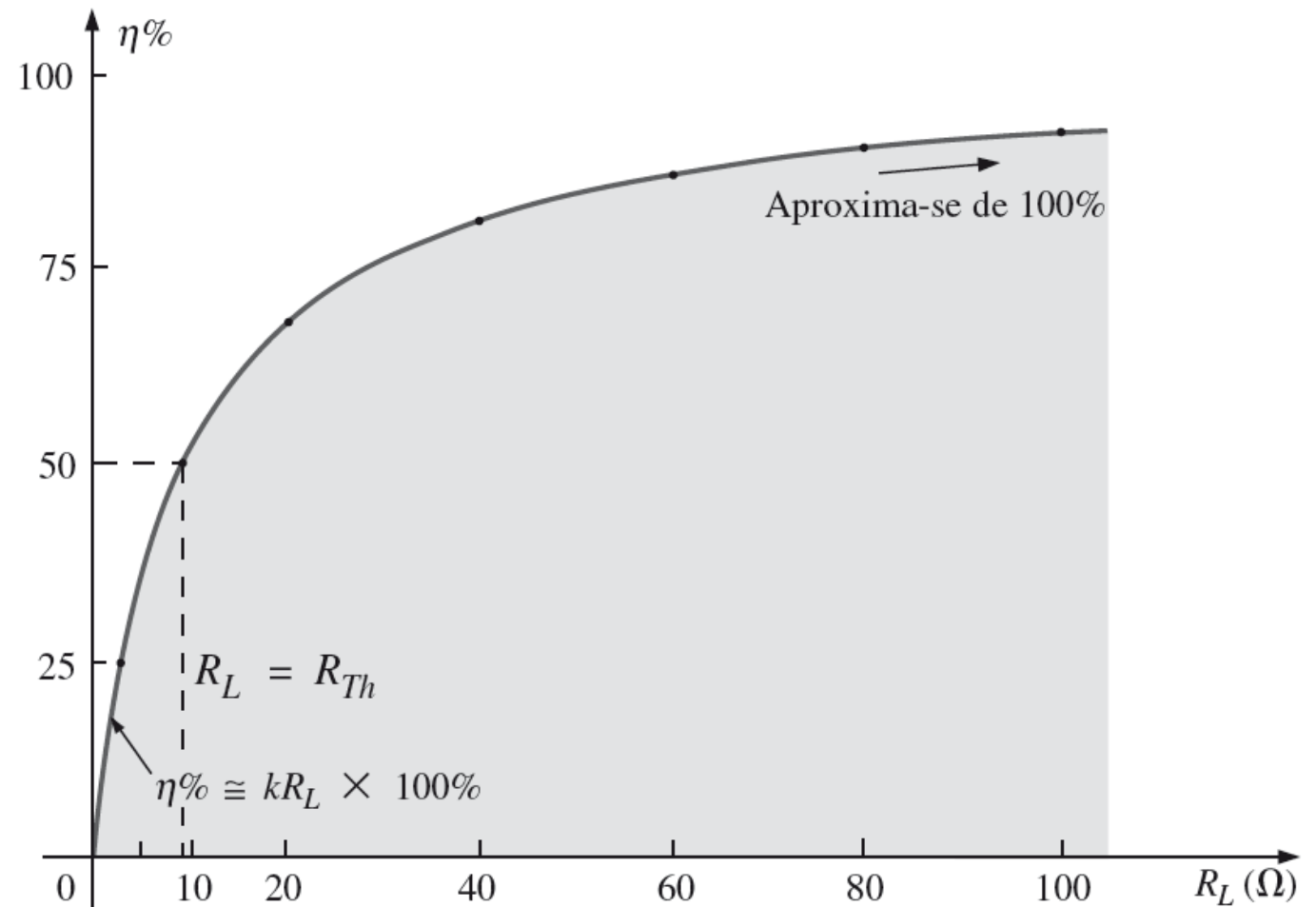


Figura 9.82 Eficiência de operação em função do aumento no valor de R_L .

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Máxima transferência de potência.

$$I_L = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{60}{9 + 100} = 0,55 A$$

$$P_L = R_L \cdot I_L^2 = 100 \cdot 0,55^2 = 30,25 W$$

$$P_{TH} = R_{TH} \cdot I_L^2 = 9 \cdot 0,55^2 = 2,72 W$$

$$P_S = P_{TH} + P_L = 30,25 + 2,72 = 32,97 W$$

$$\eta = \frac{P_L}{P_S} \cdot 100\% = \frac{30,25}{32,97} \cdot 100\% = 91,75\%$$

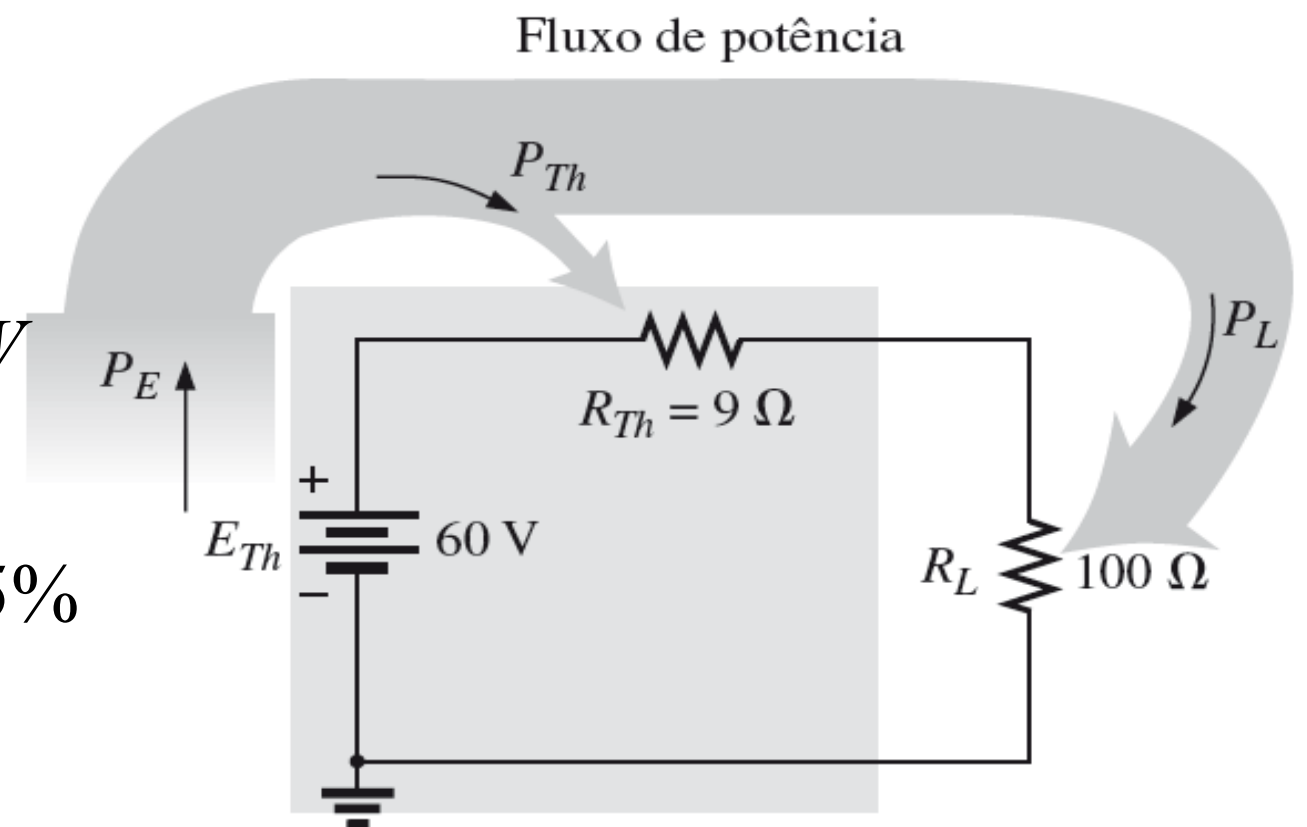


Figura 9.83 Exame de um circuito com alta eficiência, mas nível relativamente baixo de potência para a carga.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

Máxima transferência de potência:

- Se a eficiência é o fator predominante, então a carga deve ser muito maior do que a resistência interna da fonte. Se uma transferência de potência máxima for desejada e a eficiência for uma preocupação menor, então as condições ditadas pelo teorema da máxima transferência de potência devem ser aplicadas.

$$R_L = R_N$$

$$P_{L\max} = \frac{R_N \cdot I_N^2}{4}$$

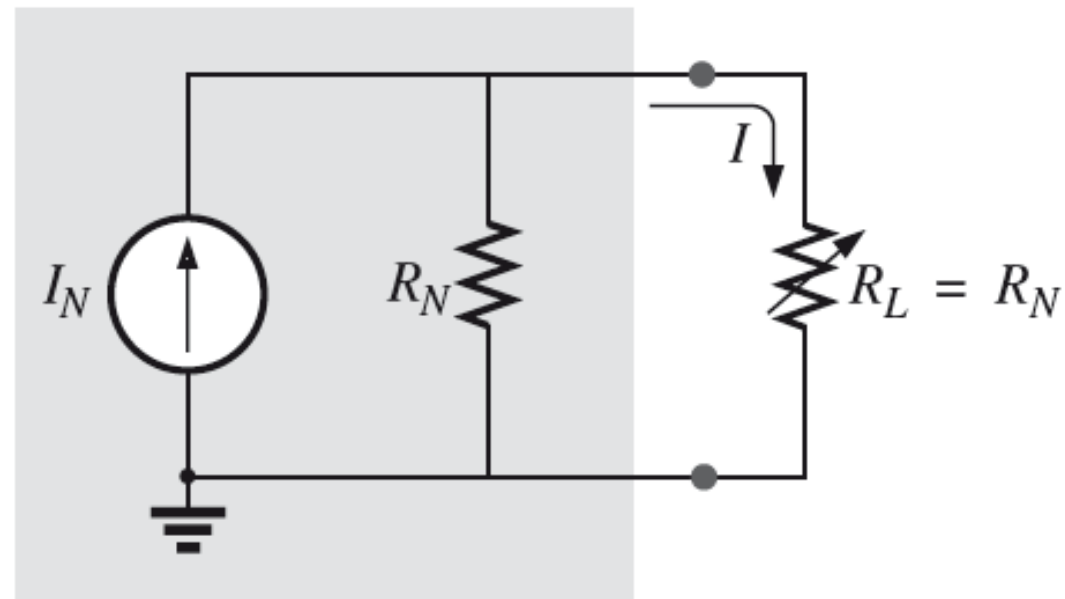


Figura 9.84 Definição das condições para a potência máxima de uma carga usando o circuito equivalente de Norton.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

a)

$$R_L = R_{\text{int}} = 2,5\Omega$$

$$P_{L\text{max}} = \frac{E^2}{4 \cdot R_{\text{int}}} = \frac{120^2}{4 \cdot 2,5} = 1,44\text{kW}$$

b)

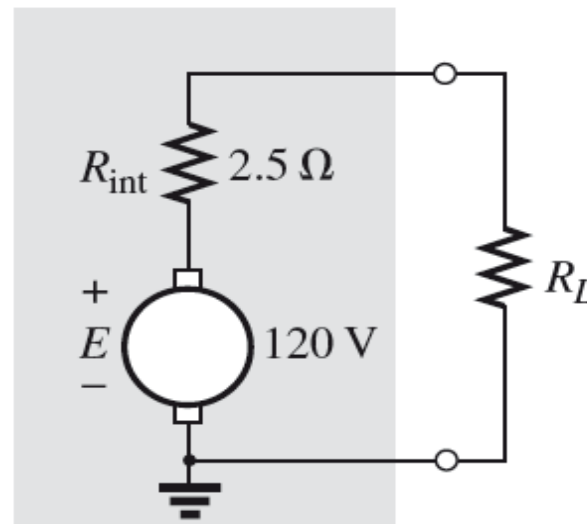
$$R_L = R_{\text{int}} = 0,5\Omega$$

$$P_{L\text{max}} = \frac{E^2}{4 \cdot R_{\text{int}}} = \frac{12^2}{4 \cdot 0,5} = 72\text{W}$$

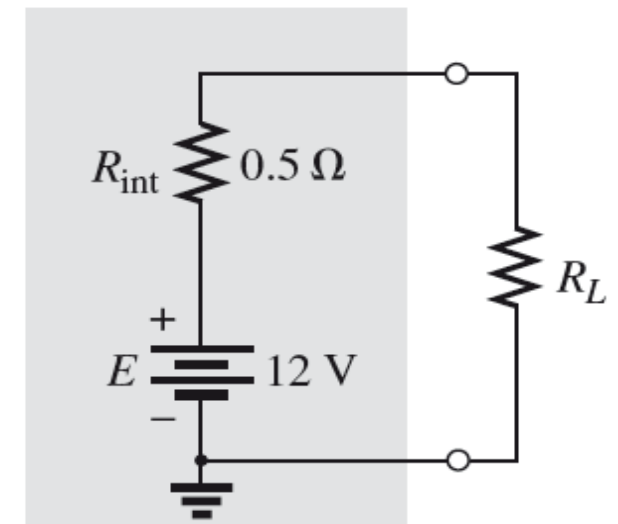
b)

$$R_L = R_{\text{int}} = 20\Omega$$

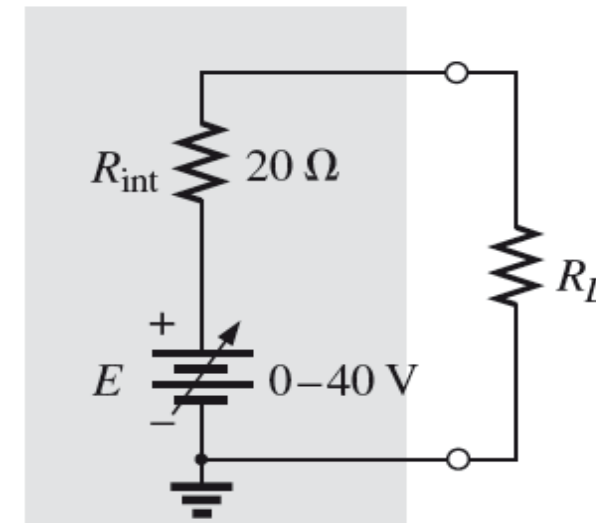
$$P_{L\text{max}} = \frac{E^2}{4 \cdot R_{\text{int}}} = \frac{40^2}{4 \cdot 20} = 20\text{W}$$



(a) Gerador CC



(b) Bateria



(c) Fonte de alimentação

Figura 9.85 Exemplo 9.14.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

$$R_{TH} = R_S = 40k\Omega$$

$$V_{TH} = V_{OC} = R_S \cdot I = 40k \cdot 10m = 400V$$

$$a) R_L = R_{TH} = 40k\Omega$$

$$P_{Lmax} = \frac{E_{TH}^2}{4 \cdot R_L} = \frac{400^2}{4 \cdot 40k} = 1W$$

$$b) R_L = 68k\Omega$$

$$I_L = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{400}{40k + 68k} = 3,7mA$$

$$P_L = R_L \cdot I_S^2 = 68k \cdot (3,7m)^2 = 0,93W$$

$$c) R_L = 8,2k\Omega$$

$$I_L = \frac{E_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{400}{40k + 8,2k} = 8,3mA$$

$$P_L = R_L \cdot I_S^2 = 8,2k \cdot (8,3m)^2 = 0,57W$$

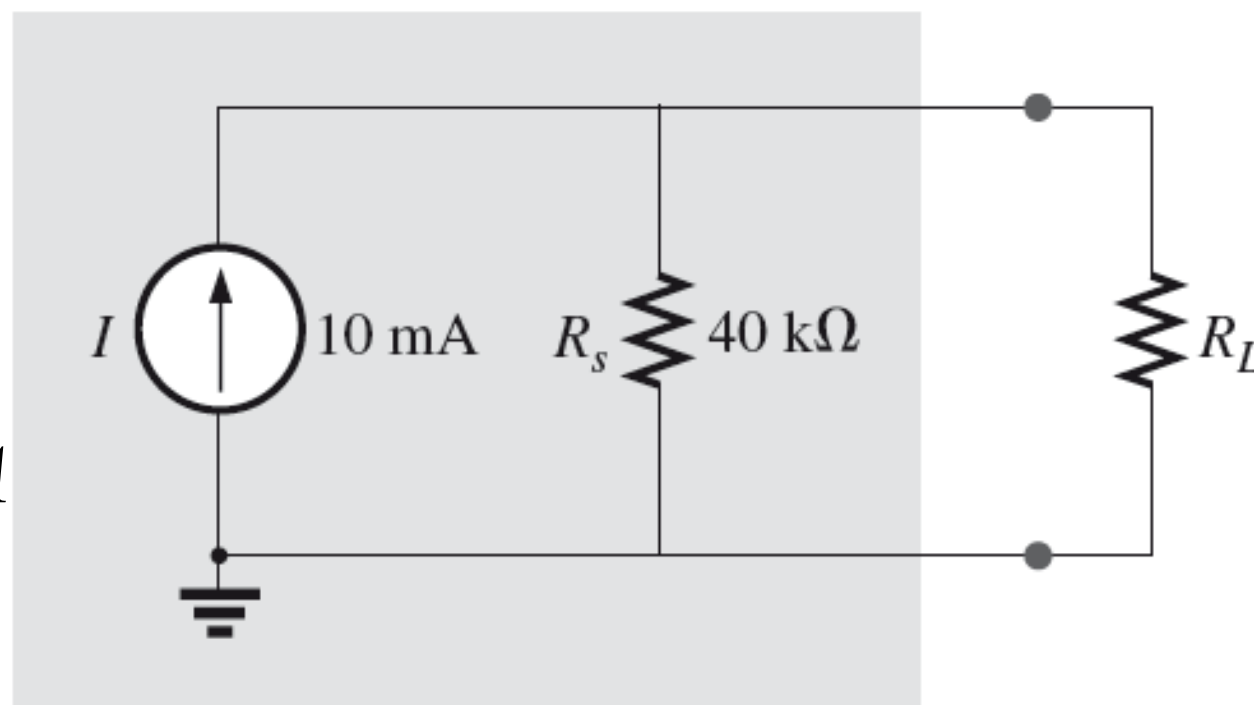


Figura 9.86 Exemplo 9.15.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

a) $R_S = 36\Omega$ e $R_L = 16\Omega$

$$I_L = \frac{E}{R_S + R_L} = \frac{48}{36 + 16} = 923,1mA$$

$$P_S = R_S \cdot I_L^2 = 36 \cdot (923,1m)^2 = 13,63W$$

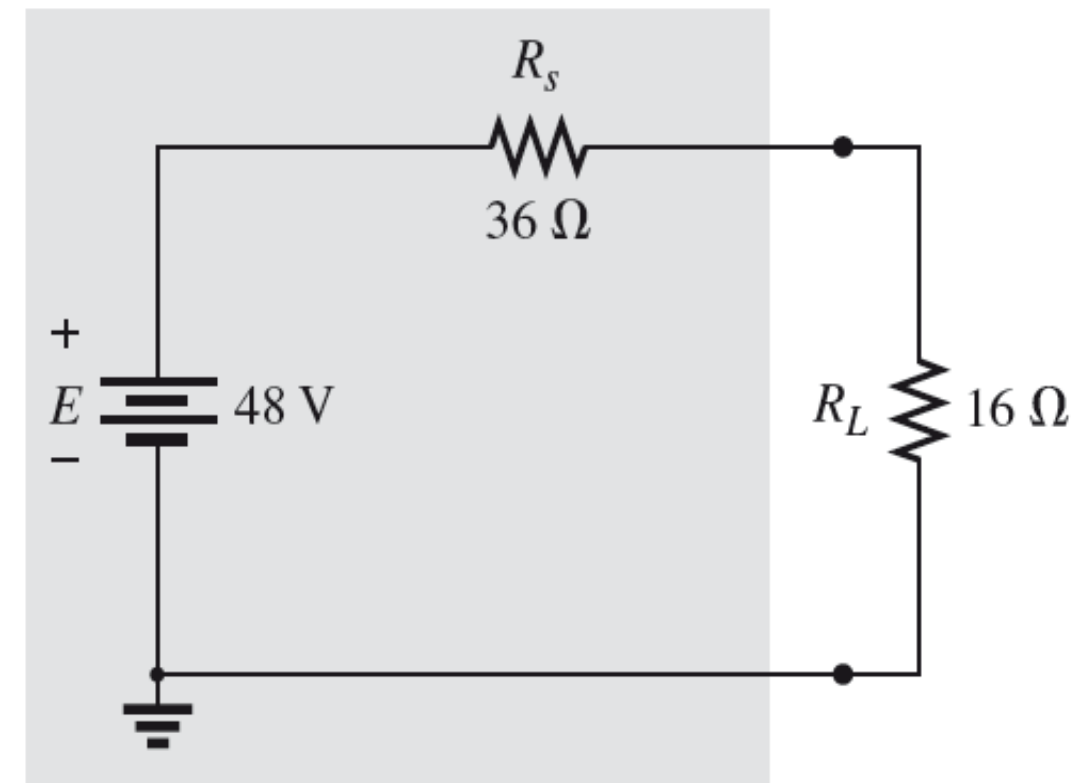
$$P_L = R_L \cdot I_L^2 = 16 \cdot (923,1m)^2 = 30,68W$$

b) $R_S = 0\Omega$ e $R_L = 16\Omega$

$$I_L = \frac{E}{R_S + R_L} = \frac{48}{0 + 16} = 3A$$

$$P_S = R_S \cdot I_L^2 = 0 \cdot 3^2 = 0W$$

$$P_L = R_L \cdot I_L^2 = 16 \cdot 3^2 = 144W$$



Fonte CC

Figura 9.87 Fonte CC com uma carga de 16Ω fixa (Exemplo 9.16).

Teorema da Máxima Transferência de Potência

$$d) R_S = 8,2\Omega \text{ e } R_L = 16\Omega$$

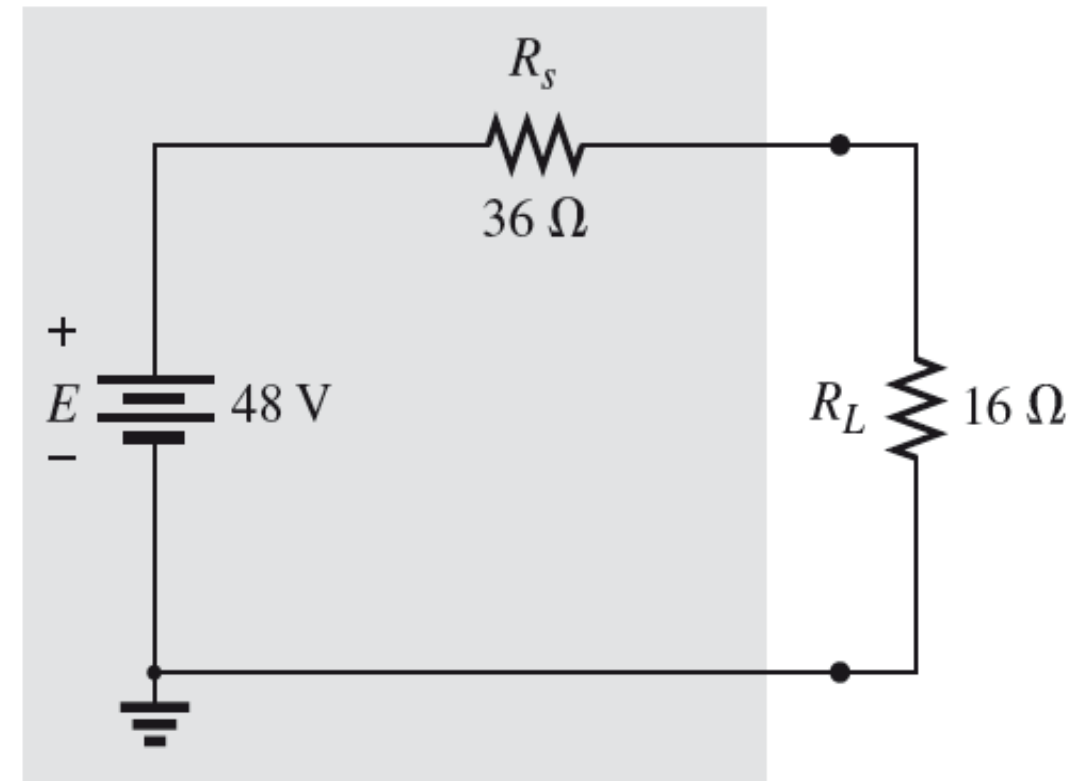
$$I_L = \frac{E}{R_S + R_L} = \frac{48}{8,2 + 16} = 1,983 A$$

$$P_L = R_L \cdot I_L^2 = 16 \cdot (1,983)^2 = 62,92 W$$

$$R_S = 22\Omega \text{ e } R_L = 16\Omega$$

$$I_L = \frac{E}{R_S + R_L} = \frac{48}{22 + 16} = 1,263 A$$

$$P_L = R_L \cdot I_L^2 = 16 \cdot (1,263)^2 = 25,52 W$$



Fonte CC

Figura 9.87 Fonte CC com uma carga de 16Ω fixa (Exemplo 9.16).

Teorema da Máxima Transferência de Potência

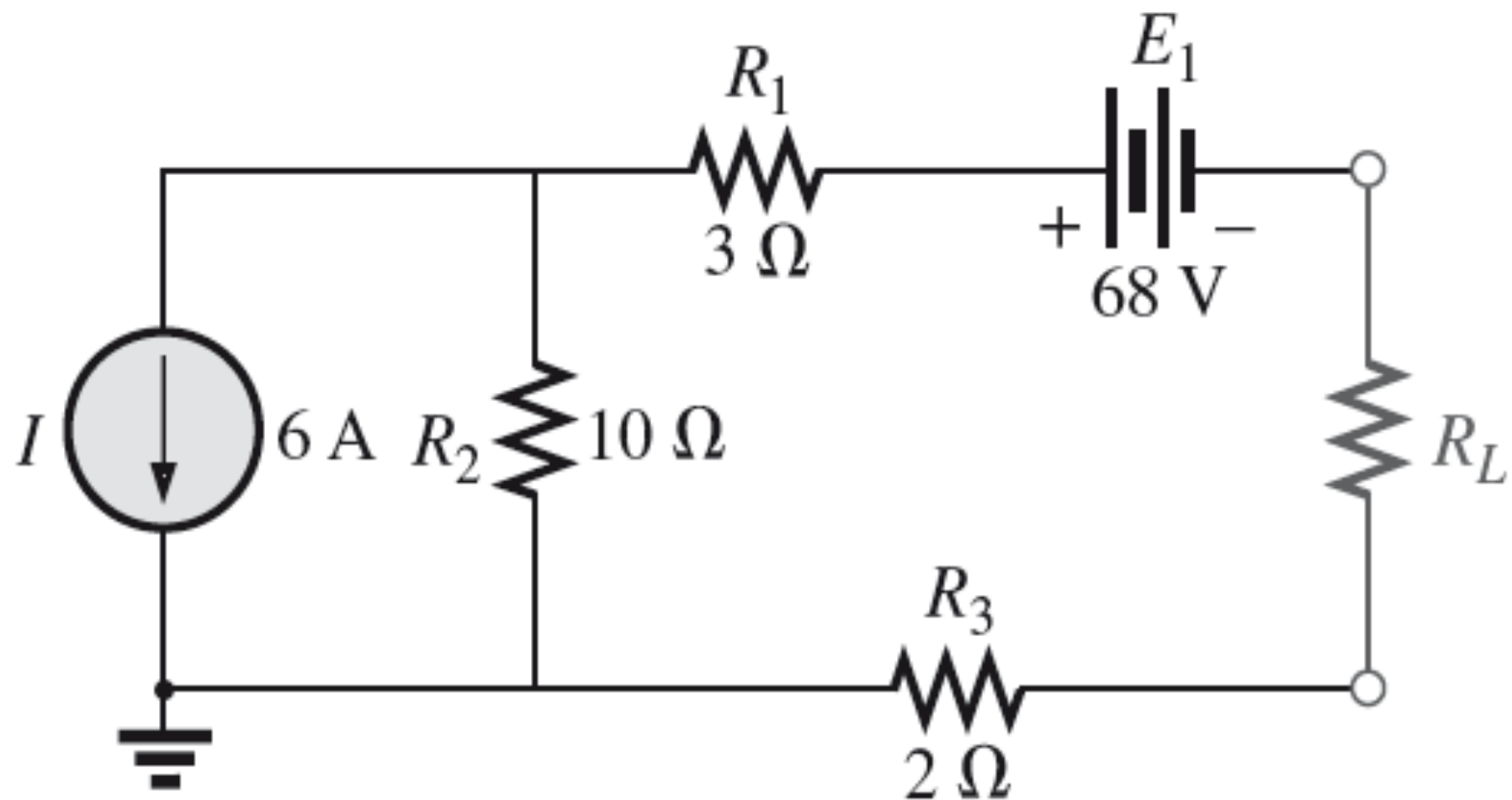


Figura 9.88 Exemplo 9.17.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

$$R_{TH} = R_1 + R_2 + R_3 = 3 + 10 + 2 = 15\Omega$$

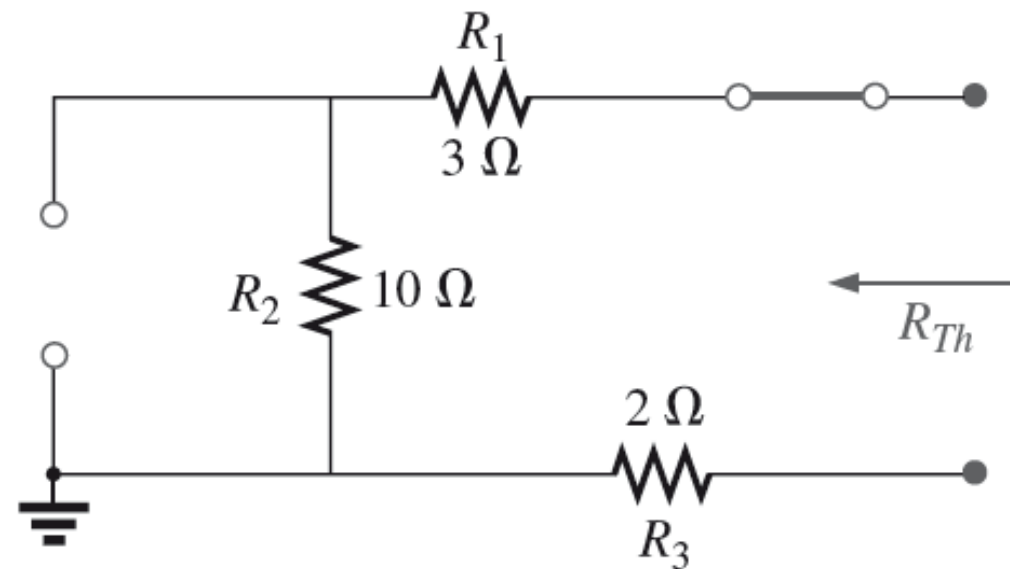


Figura 9.89 Determinação de R_{Th} para o circuito externo ao resistor R_L na Figura 9.88.

Teorema da Máxima Transferência de Potência

$$V_1 = V_3 = 0$$

$$V_2 = R_2 \cdot I = 10 \cdot 6 = 60V$$

$$V_{TH} = E_1 + V_2 = 68 + 60 = 128V$$

$$P_{L\max} = \frac{E_{TH}^2}{4 \cdot R_{TH}} = \frac{128^2}{4 \cdot 15} = 273W$$

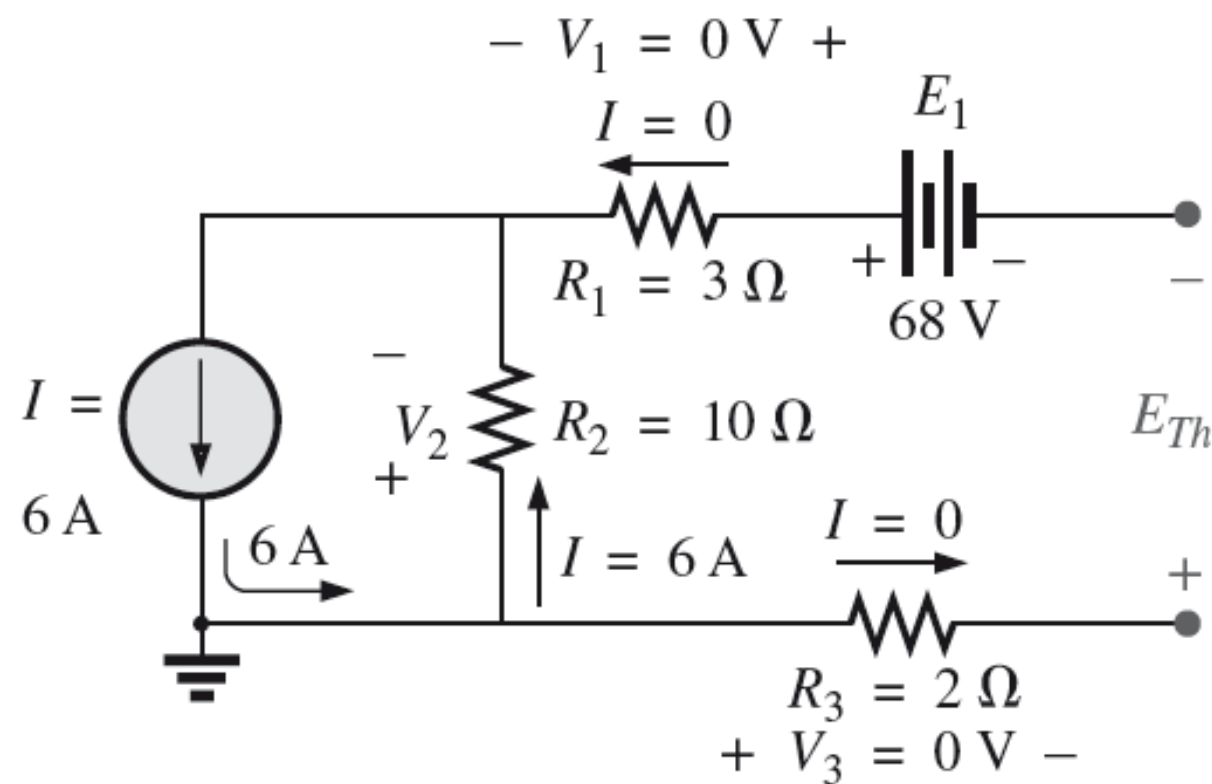


Figura 9.90 Determinação de E_{Th} para o circuito externo ao resistor R_L na Figura 9.88.

Teorema de Millman

Redução de fontes em paralelo:

- Por meio da aplicação do teorema de Millman, qualquer número de fontes de tensão em paralelo pode ser reduzido a apenas um.
- No caso da figura abaixo, por exemplo, as três fontes podem ser reduzidas a uma.
- Isso permite determinar a corrente em R_L ou a tensão entre seus terminais sem ter de aplicar métodos como o das malhas, o dos nós, o da superposição e outros.

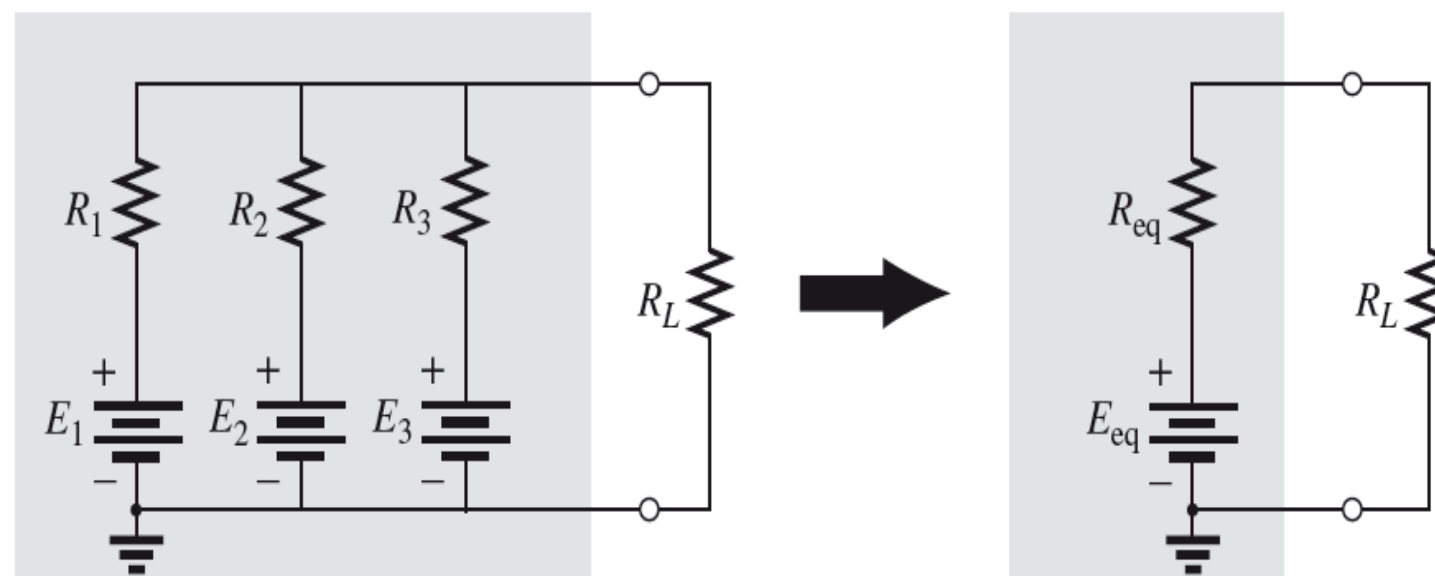


Figura 9.91 Ilustração do efeito da aplicação do teorema de Millman.

Teorema de Millman

Redução de fontes em paralelo.

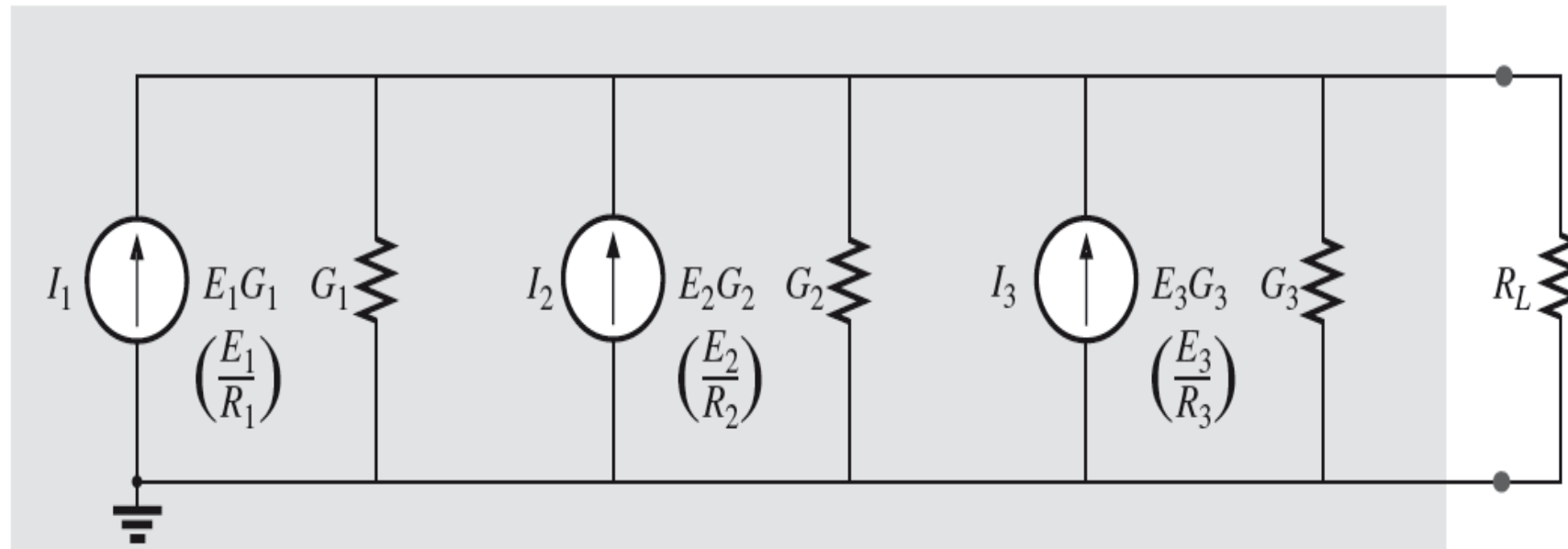


Figura 9.92 Conversão de todas as fontes da Figura 9.91 em fontes de corrente.

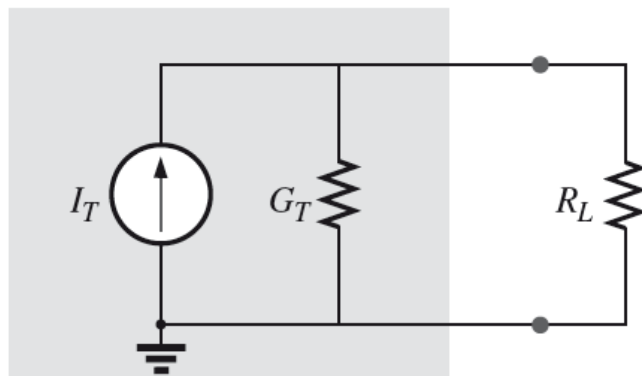


Figura 9.93 Redução de todas as fontes de corrente da Figura 9.92 a uma única fonte.

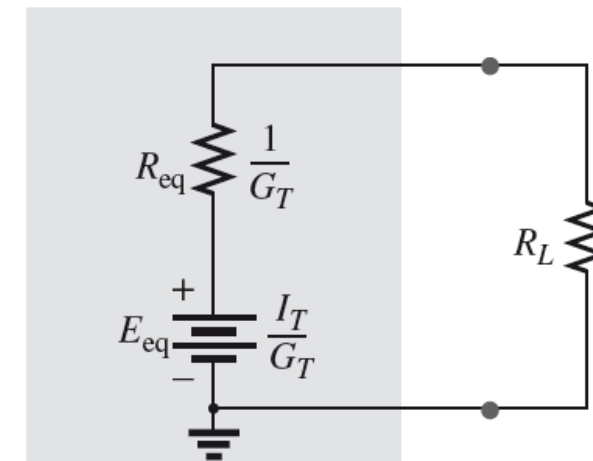


Figura 9.94 Conversão da fonte de corrente da Figura 9.93 na fonte de tensão.

Teorema de Millman

Redução de fontes em paralelo.

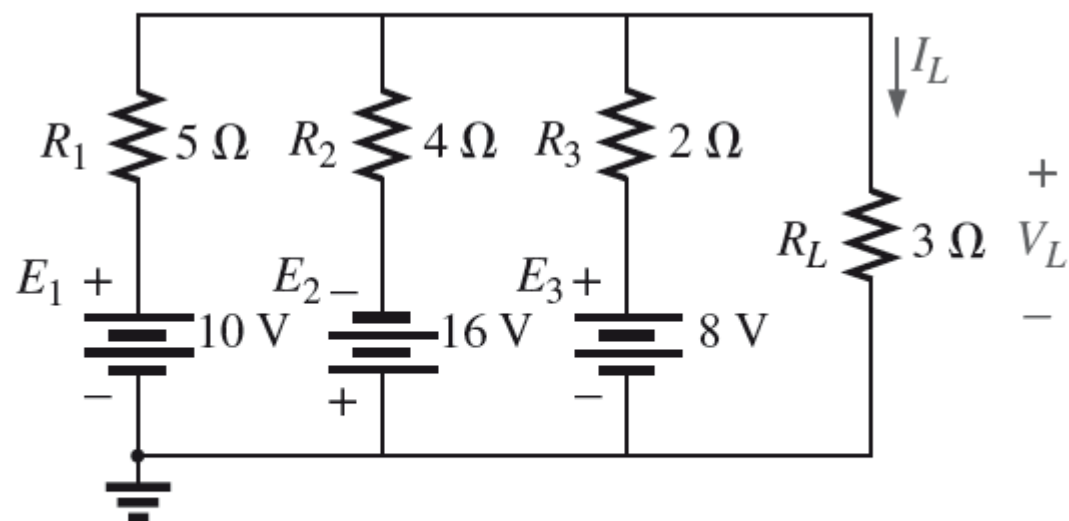


Figura 9.95 Exemplo 9.18.

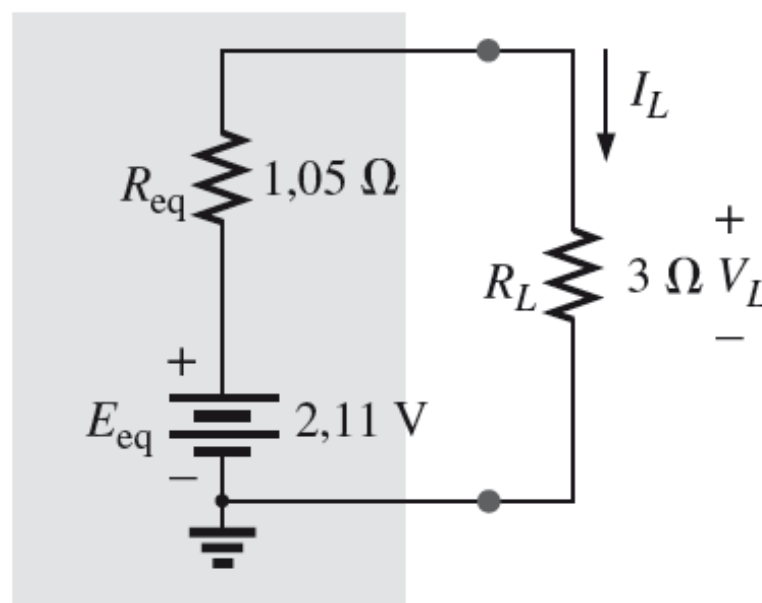


Figura 9.96 Resultado da aplicação do teorema de Millman ao circuito visto na Figura 9.95.

$$E_{eq} = \frac{\pm \frac{E_1}{R_1} \pm \frac{E_2}{R_2} \pm \frac{E_3}{R_3} \dots \pm \frac{E_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \dots \frac{1}{R_n}}$$

$$E_{eq} = \frac{\frac{10}{5} - \frac{16}{4} + \frac{8}{2}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 2,11V$$

$$R_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \dots \frac{1}{R_n}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1,05\Omega$$

Teorema de Millman

Redução de fontes em paralelo.

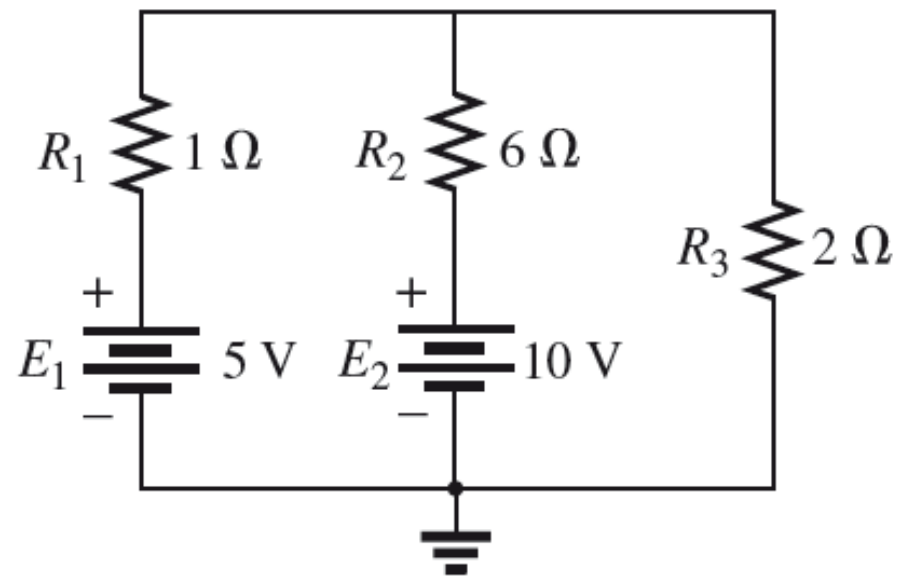


Figura 9.97 Exemplo 9.19.

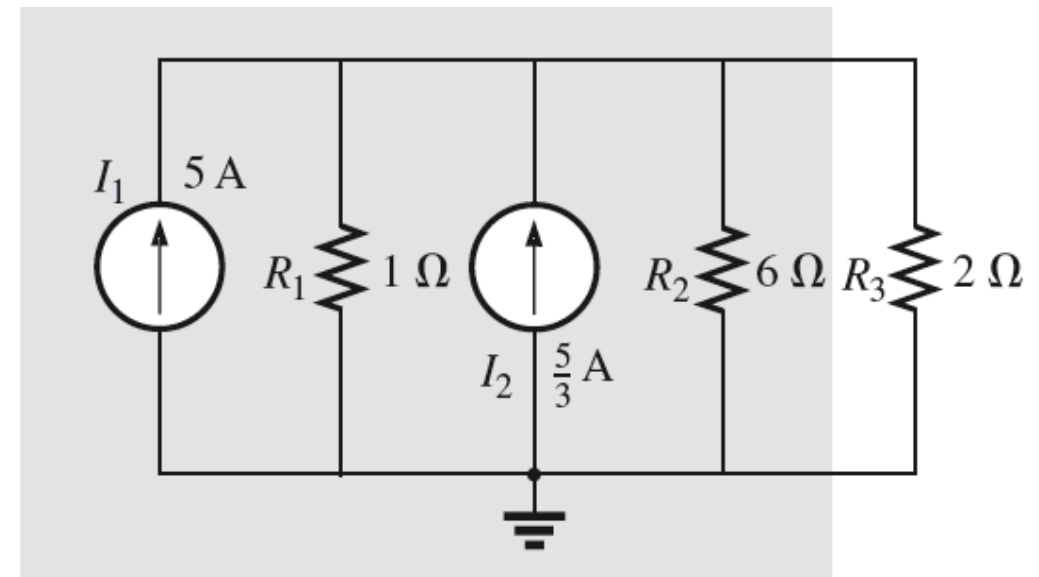


Figura 9.98 Conversão das fontes da Figura 9.97 em fontes de corrente.

Teorema de Millman

Redução de fontes em paralelo.

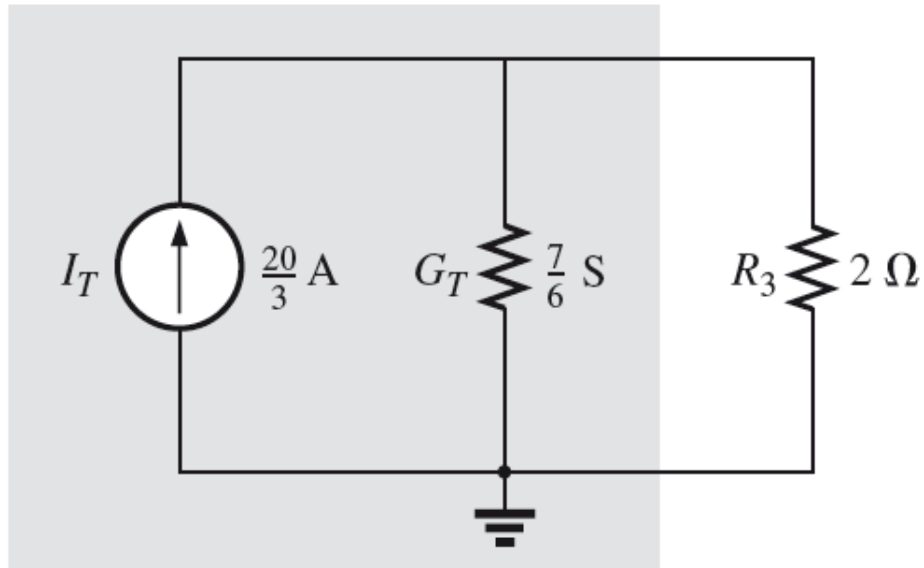


Figura 9.99 Redução das fontes de corrente da Figura 9.98 a uma única fonte.

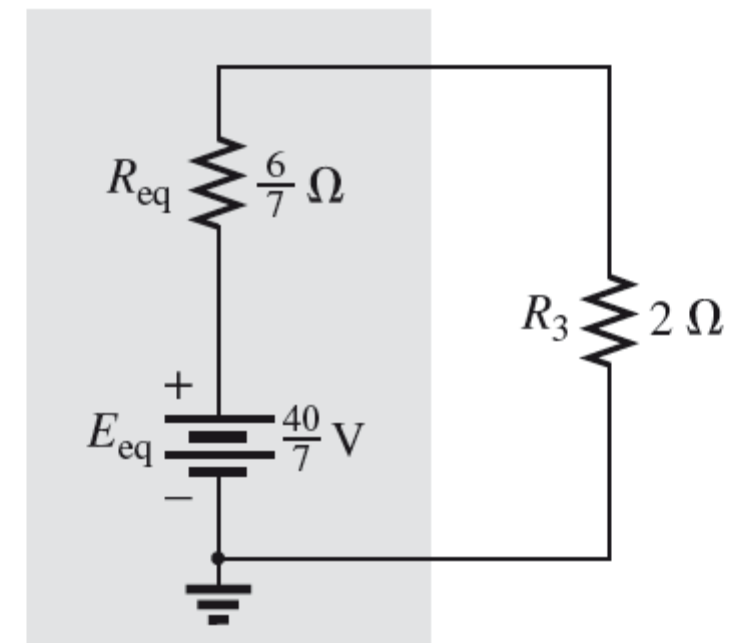


Figura 9.100 Conversão da fonte de corrente da Figura 9.99 em fonte de tensão.

Teorema de Millman

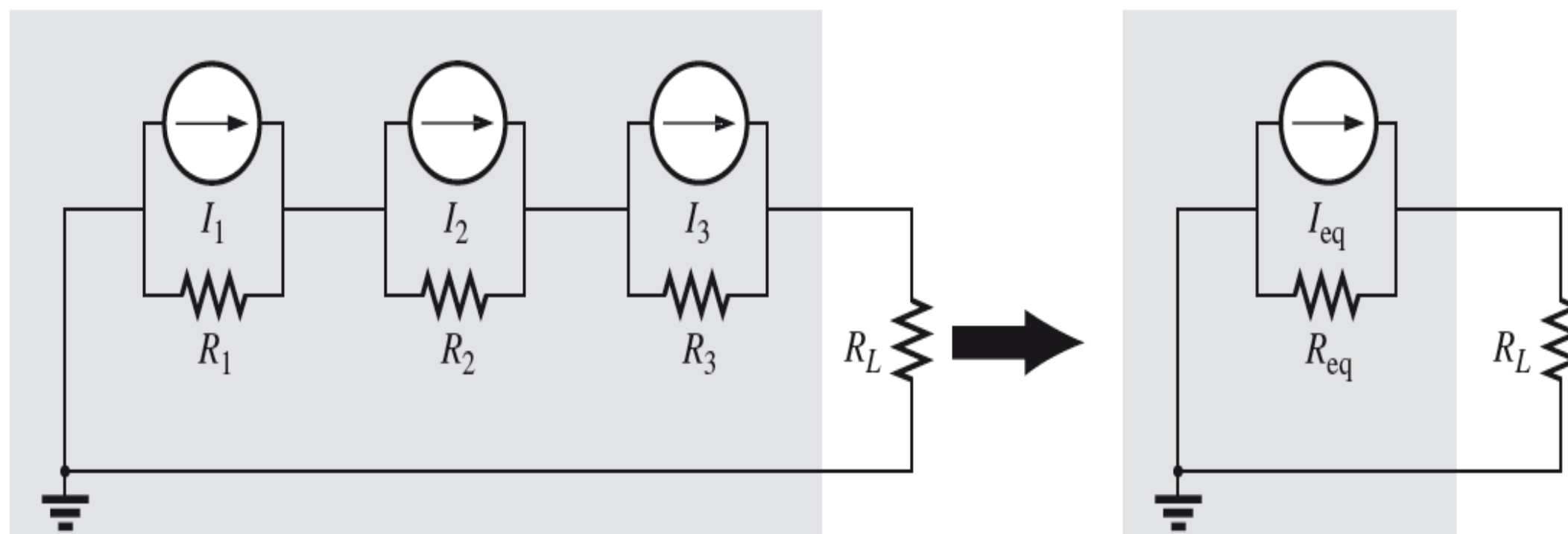


Figura 9.101 Ilustração do dual do teorema de Millman.

Teorema da Substituição

Alteração para circuitos equivalentes:

- O teorema da substituição afirma o seguinte:
 - Se a corrente que atravessa um ramo qualquer de um circuito bilateral de corrente contínua e a tensão entre os terminais do mesmo ramo são conhecidas, esse ramo pode ser substituído por qualquer combinação de componentes que mantenha inalteradas a tensão e a corrente associadas ao ramo escolhido.

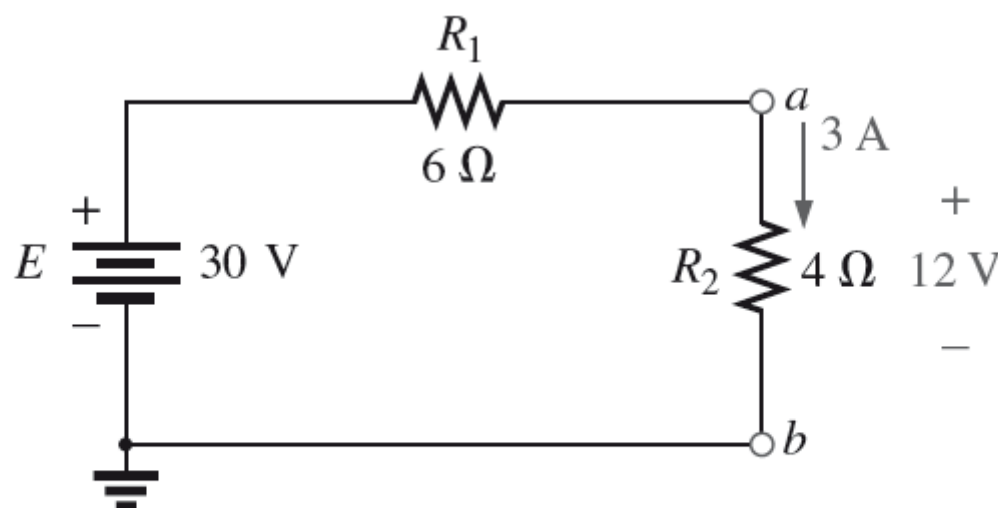


Figura 9.102 Demonstração do teorema da substituição.

Teorema da Substituição

Alteração para circuitos equivalentes.

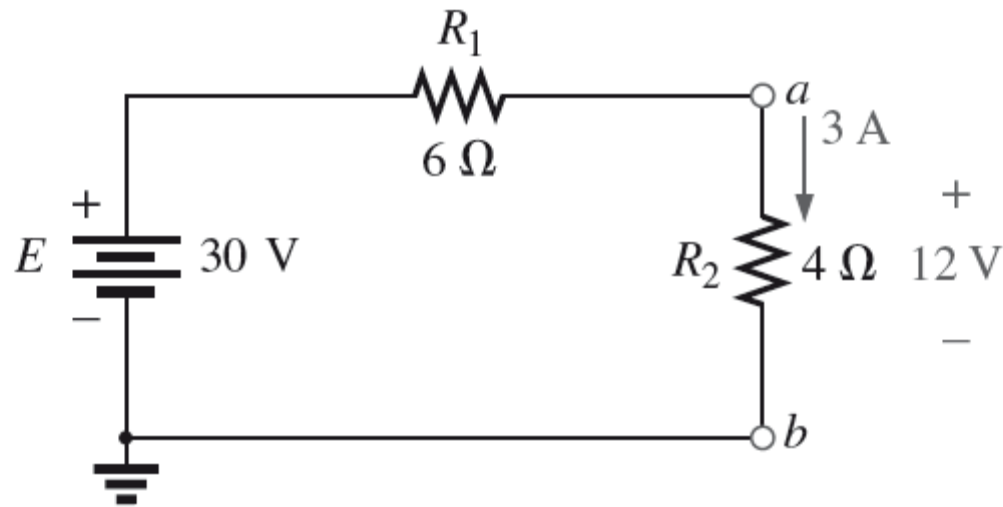


Figura 9.102 Demonstração do teorema da substituição.

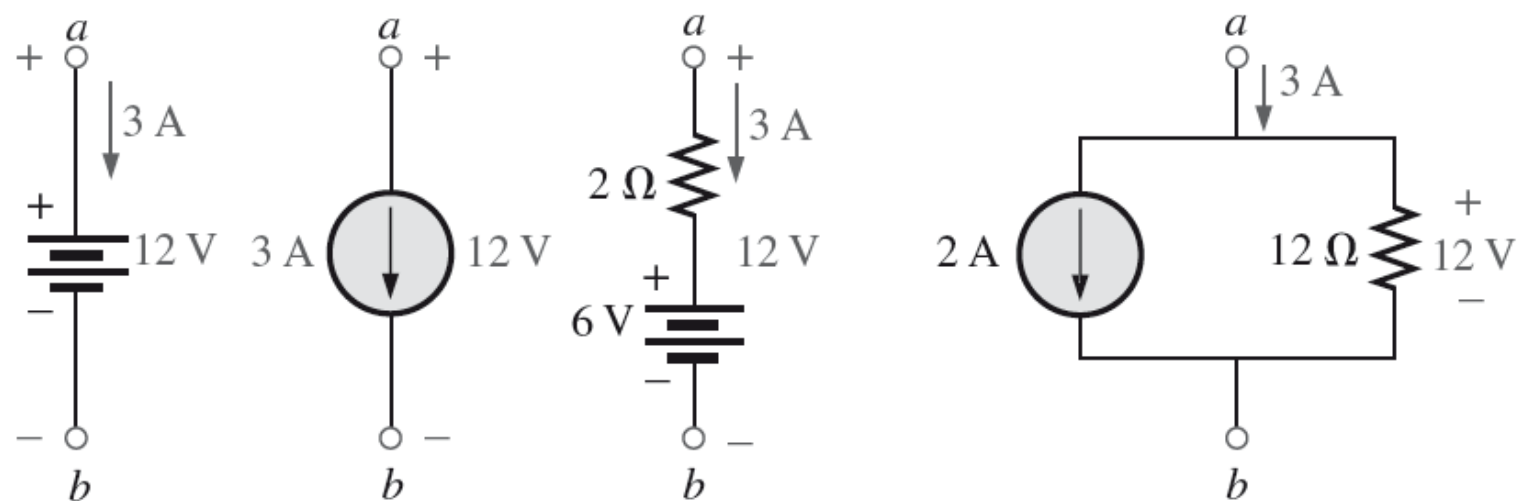


Figura 9.103 Ramos equivalentes ao ramo $a-b$ visto na Figura 9.102.

Teorema da Substituição

Alteração para circuitos equivalentes.

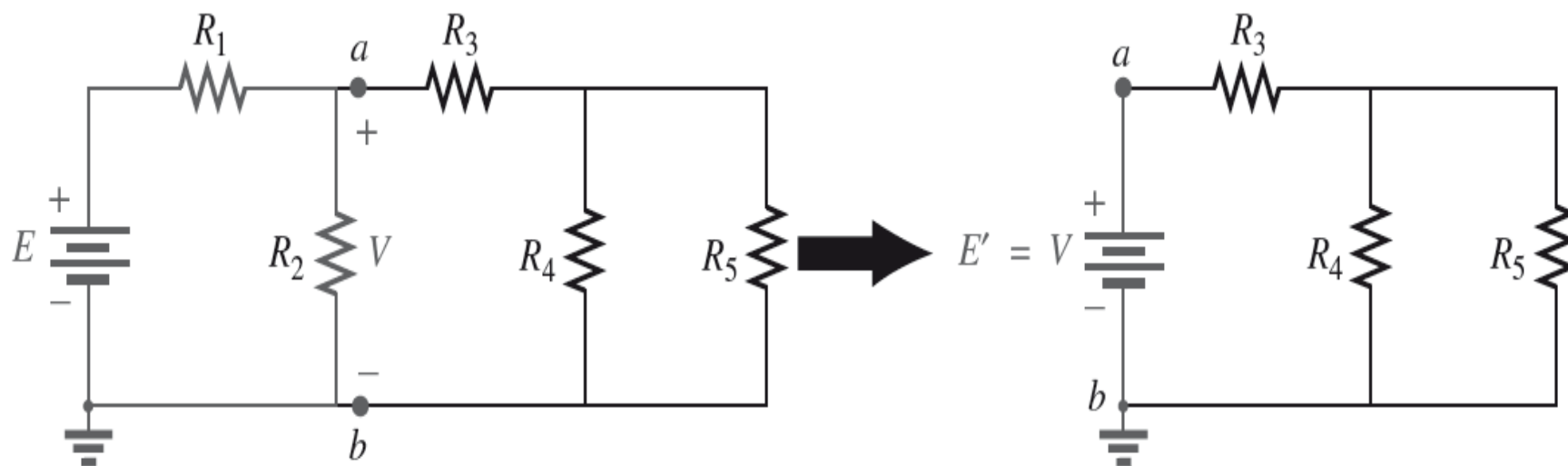


Figura 9.104 Exemplo de aplicação do teorema da substituição a um circuito complexo, substituindo uma tensão conhecida por uma fonte de tensão.

Teorema da Substituição

Alteração para circuitos equivalentes.

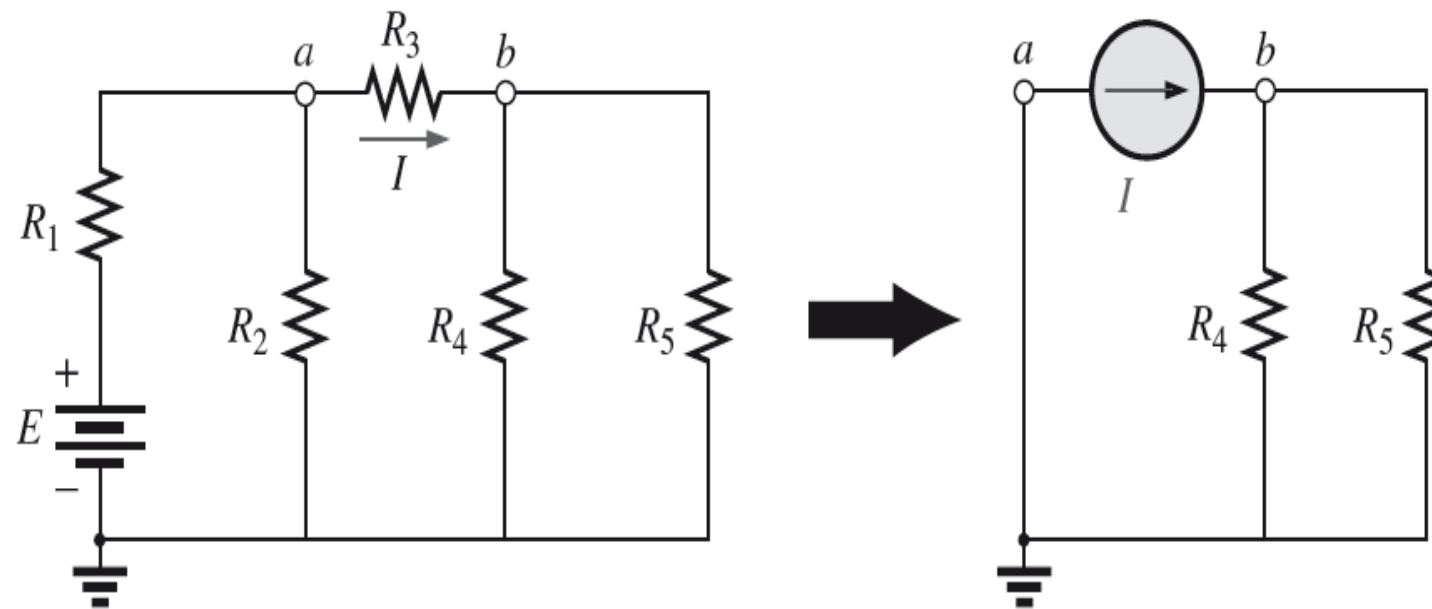


Figura 9.105 Exemplo de aplicação do teorema da substituição a um circuito complexo, substituindo uma corrente conhecida por uma fonte de corrente.

Teorema da Reciprocidade

Alteração de circuitos:

- O teorema da reciprocidade é aplicável somente a circuitos com apenas uma fonte. Portanto, não pode ser usado na análise dos circuitos com múltiplas fontes que discutimos até agora neste capítulo.
- O teorema afirma o seguinte:
 - A corrente I em qualquer ramo de um circuito com uma única fonte de tensão E localizada em outro ramo qualquer do mesmo circuito é igual à corrente no ramo onde estava a fonte, se ela for transferida para o ramo no qual a corrente I foi originalmente medida.

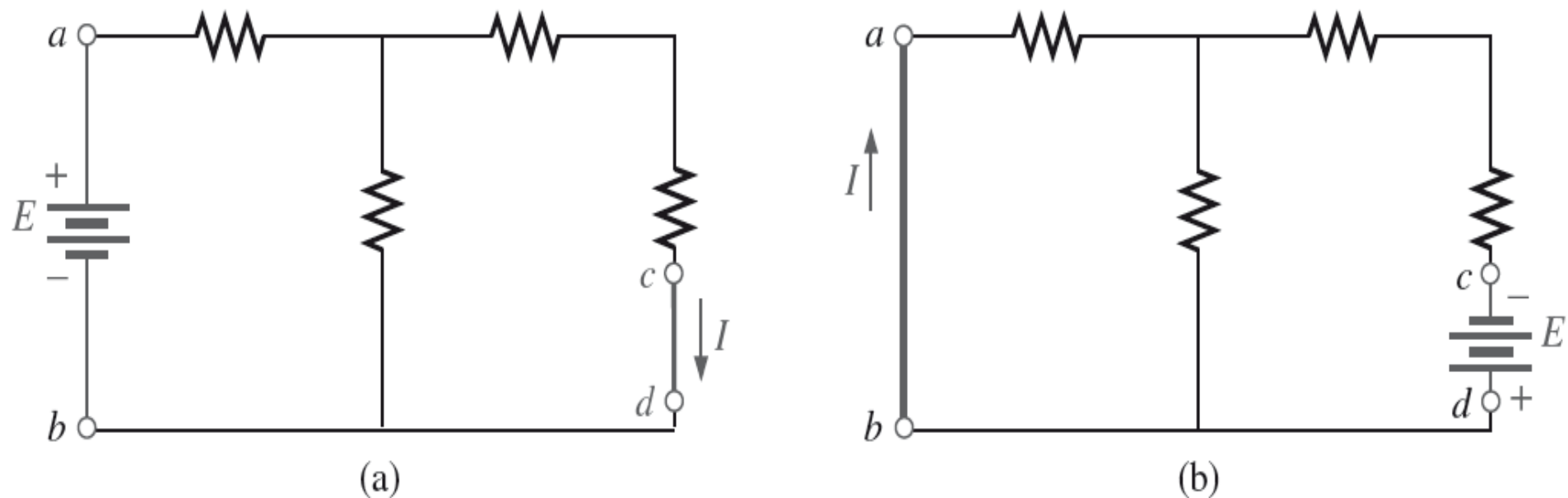


Figura 9.106 Ilustração do teorema da reciprocidade.

Teorema da Reciprocidade

Alteração de circuitos.

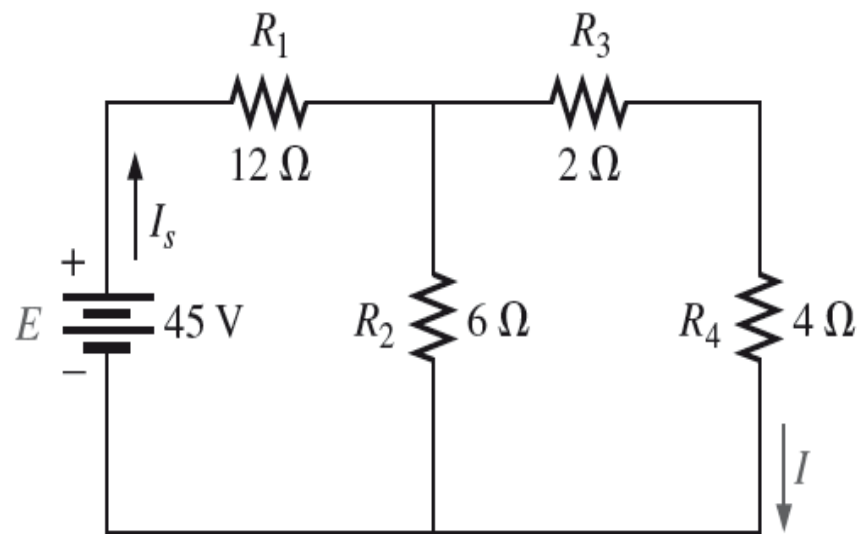


Figura 9.107 Determinação da corrente I produzida por uma fonte E .

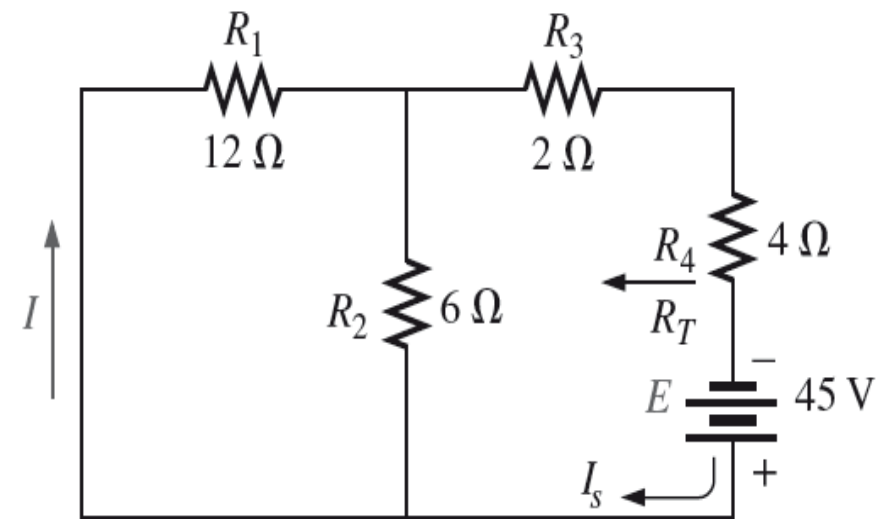


Figura 9.108 Intercâmbio entre E e I da Figura 9.107 para demonstrar a validade do teorema da reciprocidade.

Teorema da Reciprocidade

Alteração de circuitos.

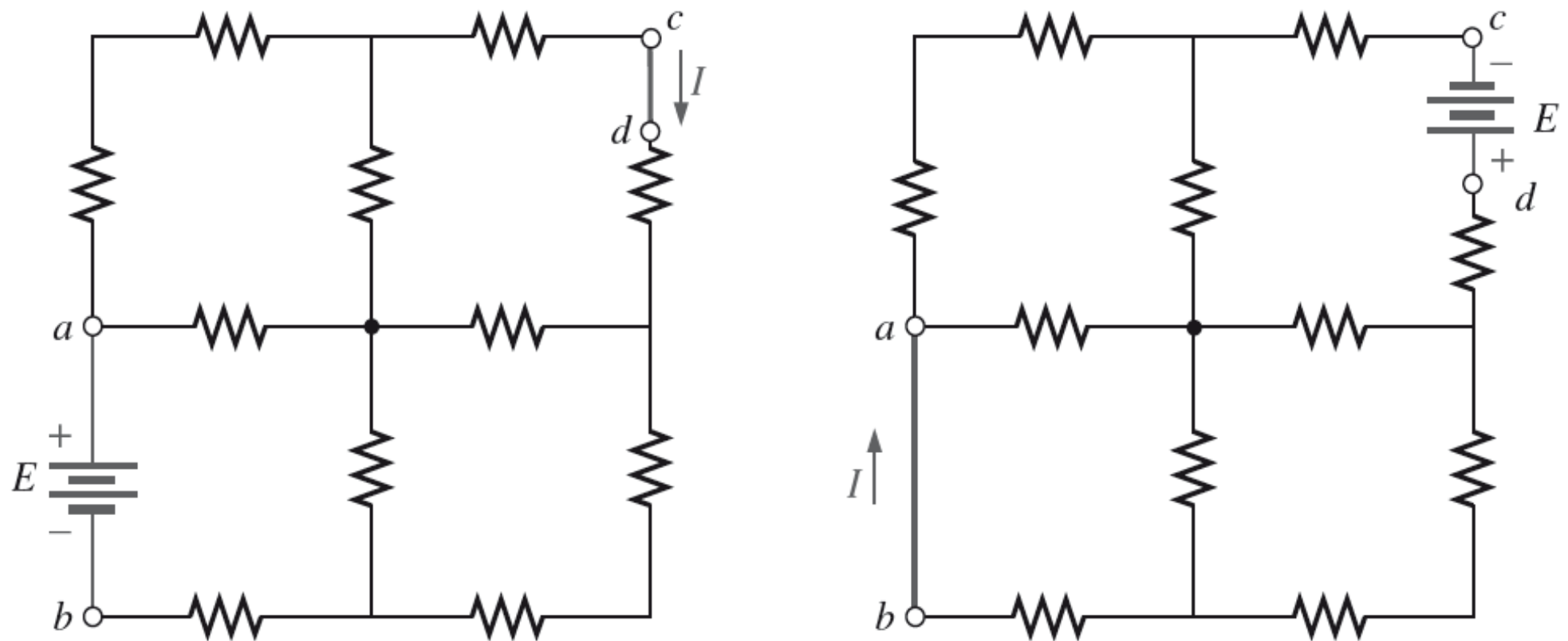
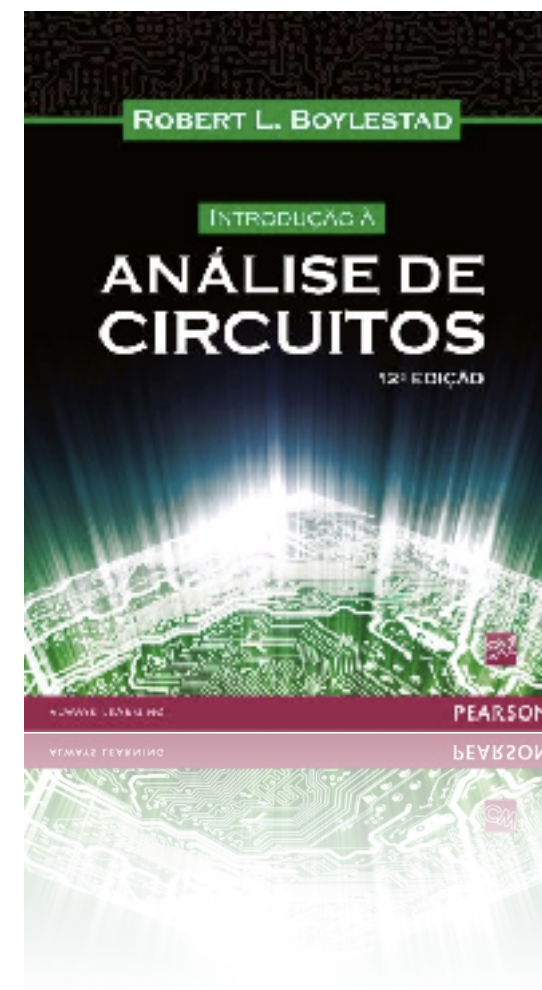
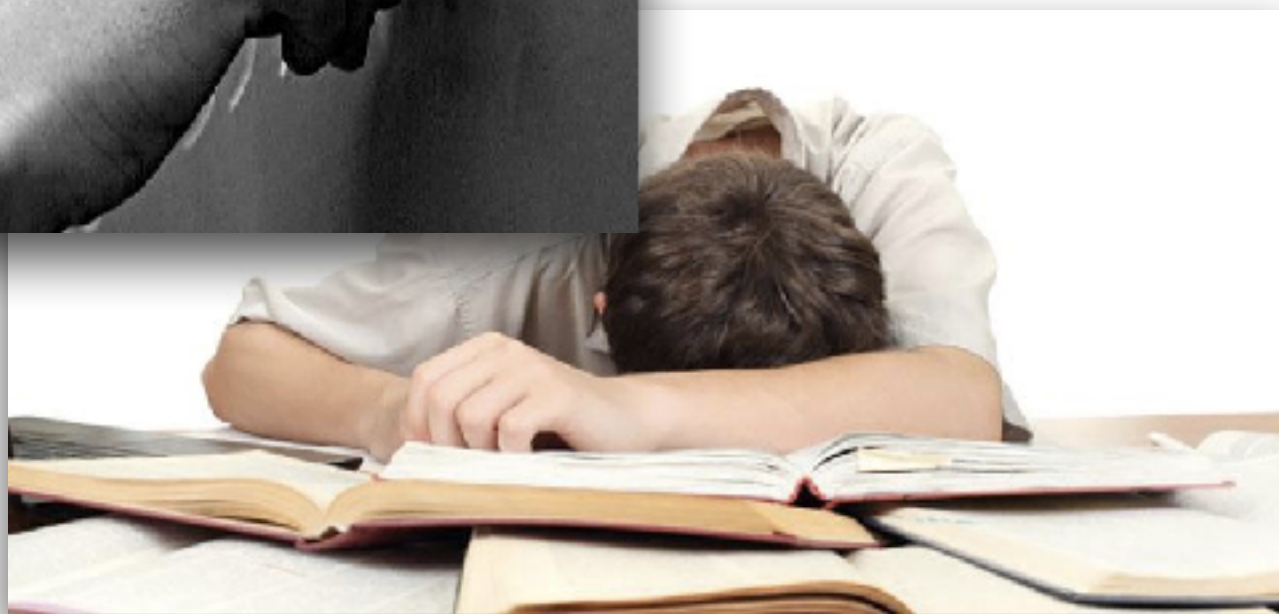
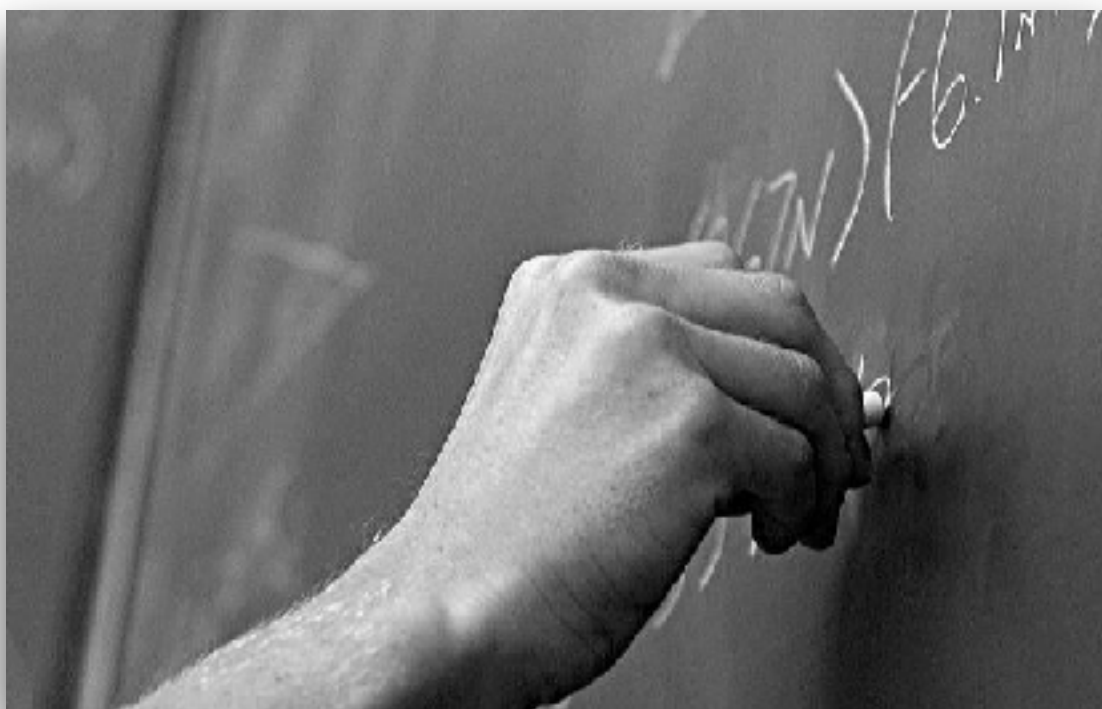


Figura 9.109 Exemplo da utilidade e da importância do teorema da reciprocidade.

Demonstrações

Exemplos:

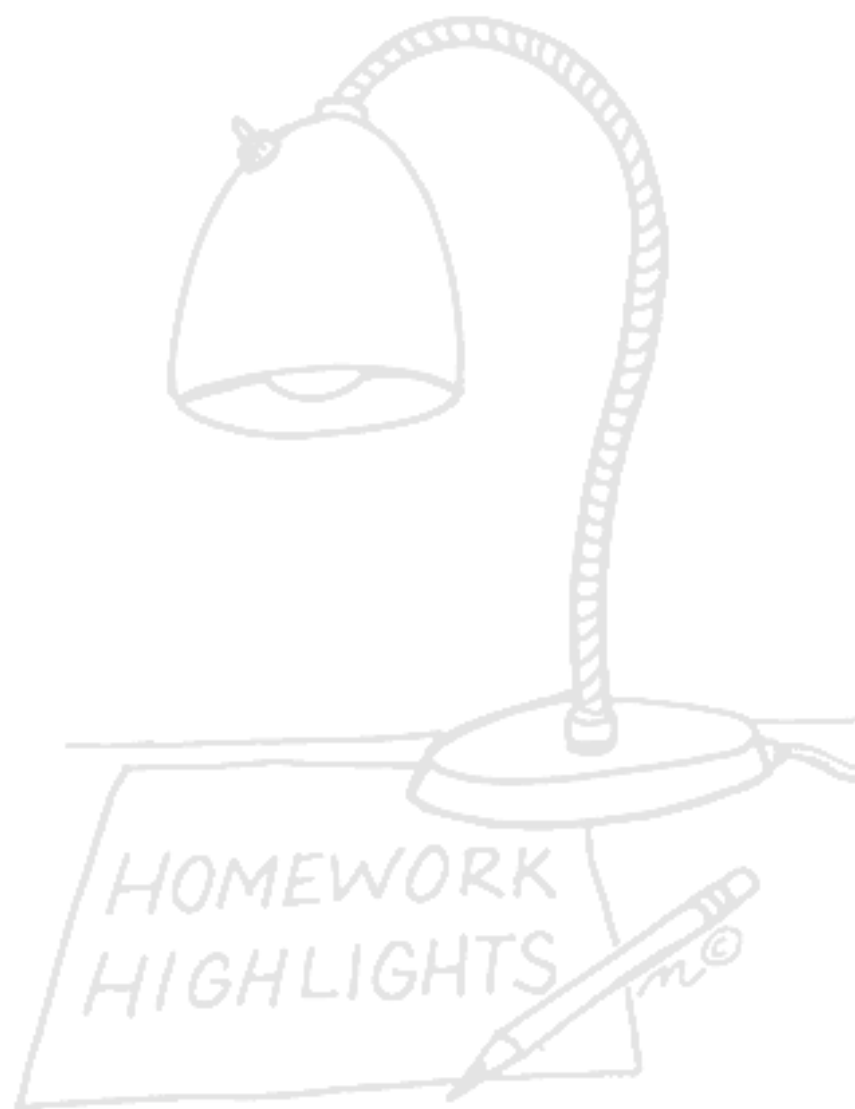
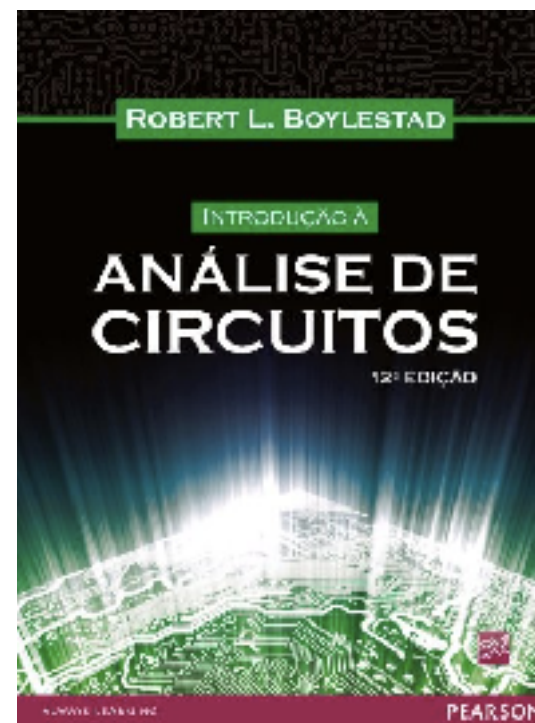
- Exemplos e problemas do capítulo 9 - Teoremas para análise de circuitos do livro Análise de Circuitos de Robert L. Boylestad, Pearson, 2012.



Tarefas

Durante e após a aula:

- Ler o capítulo 9 - Teoremas para análise de circuitos do livro *Análise de Circuitos* de Robert L. Boylestad, Pearson, 2012.



Próxima Aula

Capacitores.



Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/capacitores.htm>