

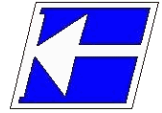
INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

CURSO SUPERIOR DE TECNOLOGIA EM ELETRÔNICA INDUSTRIAL

Circuitos Elétricos I



GUIA DE ESTUDO

- OBJETIVO DE APRENDIZAGEM -

ANÁLISE DE CIRCUITOS COM CAPACITORES

Prof. Clóvis Antônio Petry.

Florianópolis, outubro de 2020.

ANÁLISE DE CIRCUITOS COM CAPACITORES

Objetivo de Aprendizagem

Analisar circuitos com capacitores.

Objetivos parciais

- Conhecer o comportamento transitório de capacitores;
- Analisar circuitos simples de carga e descarga de capacitores;
- Resolver exercícios envolvendo capacitores.

Aulas relacionadas

Este objetivo de aprendizagem está relacionado com a aula 10 da disciplina.

Pré-requisitos

Ter estudado o objetivo de aprendizagem 16 sobre capacitores.

Continuidade dos Estudos

Os objetivos de aprendizagem da disciplina de Circuitos Elétricos I findam neste capítulo.

Roteiro para estudos

Os estudos referentes a este objetivo de aprendizagem consistem em:

1. Estudar este documento resumo, realizando as atividades propostas no mesmo;
2. Responder o quiz relacionado a este objetivo de aprendizagem;
3. Caso perceba necessidade, estudar a apresentação deste assunto ou ler o capítulo do livro texto usado na disciplina;
4. Realizar os exercícios deste tópico da matéria;
5. Realizar o laboratório virtual, se for possível, relacionado a este objetivo de aprendizagem;
6. Realizar a avaliação final para progredir ao próximo conteúdo.

Referências

- Material disponibilizado para a disciplina de Circuitos Elétricos I – 2020/1. Departamento Acadêmico de Eletrônica, Instituto Federal de Santa Catarina, Campus Florianópolis.
- BOYLESTAD, Robert. Introdução à análise de circuitos. Tradução de Daniel Vieira, Jorge Ritter. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

Check-list

Caro estudante, verifique se você completou as atividades deste objetivo de aprendizagem e obteve êxito para continuar seus estudos.

Assinale as atividades realizadas:

Estudo do documento resumo:

- ☐ () Leitura do documento resumo;
- ☐ () Exercícios do documento resumo;
- ☐ () Atividade avaliativa do documento resumo.
- ☐ () Obtive êxito e entendi o conteúdo deste documento;
- ☐ () Ainda não entendi bem o conteúdo e estudarei o mesmo com mais profundidade.

Estou com dúvidas, irei estudar com mais detalhes este conteúdo:

- ☐ () Assistir a apresentação relacionada ao conteúdo (apresentação 10);
- ☐ () Ler os capítulos deste conteúdo no livro (capítulo 10).

Ainda estou com dúvidas:

- ☐ () Entrarei em contato com o professor.

Obtive êxito, então seguirei em frente:

- ☐ () Responder ao quiz deste conteúdo no Moodle;
- ☐ () Informar ao professor que estou avançando com o conteúdo.

Parabéns, continue estudando com afinco e vamos em frente!!

CONTEÚDO

- OBJETIVO DE APRENDIZAGEM - ANÁLISE DE CIRCUITOS COM CAPACITORES

1 Introdução

A aula anterior teve como objetivo apresentar os componentes capacitores, seu princípio de funcionamento, tipos e outros aspectos relevantes destes elementos. Nesta aula será realizada a análise de circuitos envolvendo capacitores.

1.1 Conteúdo – O que irei estudar

Estudaremos neste tópico:

- Comportamento transitório de capacitores;
- Análise do processo de carga de capacitores;
- Análise do processo de descarga de capacitores.

1.2 Metodologia – O que devo fazer e como fazer

Leia com atenção o conteúdo a seguir. Ao final deste tópico são apresentados exercícios resolvidos. Após são apresentados alguns exercícios propostos.

Ao realizar estas atividades e se sentir confiante para progredir, siga os passos indicados na primeira página deste documento.

Espera-se que após estudar este assunto, você consiga:

- Explicar com suas palavras o que é o transitório de carga de um capacitor;
- Explicar com suas palavras o que é o transitório de descarga de um capacitor;
- Calcular as principais grandezas durante os transitórios de carga e descarga de capacitores.

A atividade avaliativa deste objetivo de aprendizagem consistirá em apresentar ao estudante um circuito com capacitor e solicitar que sejam realizados cálculos básicos relacionados ao mesmo.

Exemplo de atividade avaliativa:

1. Explique o que são os transitórios de carga e descarga de capacitores.
2. Quais os parâmetros influenciam no tempo de carga e descarga de um capacitor?
3. O que é a constante de tempo de circuito resistivo-capacitivo?
4. Calcule as principais grandezas durante a carga de um capacitor.
5. Calcule as principais grandezas durante a descarga de um capacitor.

2 Transitório de Carga de Capacitores

2.1 Introdução

A carga de capacitores é realizada usando-se resistores ou outros elementos de circuito em série com os mesmos, caso sejam conectados em fontes de tensão. Isso é feito para se limitar a corrente de carga nos capacitores. Por outro lado, caso os capacitores sejam conectados em fontes de corrente, então a própria fonte pode ser especificada para limitar a corrente de carga no capacitor.

A seguir serão apresentados os processos de carga de capacitores conectados em fontes de corrente ou fontes de tensão, neste último caso empregando resistores para limitar a corrente de carga que irá circular pelo circuito.

2.2 Transitório de Carga de Capacitores com Fontes de Corrente

A Figura 1 mostra um circuito com um capacitor (C_1) conectado em uma fonte de corrente (I_1). Neste caso, a corrente do circuito é imposta pela fonte de corrente, e a tensão do circuito será dada pelo estado de carga do capacitor. Assim:

$$i_{C1}(t) = I_1$$

$$v_{C1}(t) = v_1(t)$$

Note que as variáveis variam no tempo, ou seja, a tensão no capacitor será variável na medida que o mesmo for sendo carregado pela fonte de corrente.

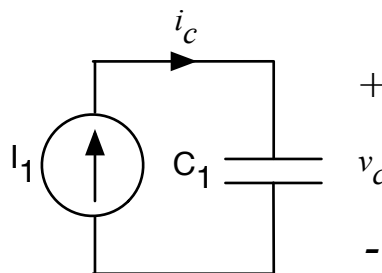


Figura 1 – Capacitor conectado em uma fonte de corrente.

Lembrando da aula anterior, que a tensão no capacitor é a relação entre a quantidade de cargas armazenadas nas placas do mesmo e de sua capacitância:

$$V = \frac{Q}{C} \rightarrow v_{C1}(t) = \frac{q_{C1}(t)}{C_1}$$

A capacitância é considerada constante, mas a quantidade de cargas acumuladas nas placas pode variar conforme o capacitor estiver mais ou menos carregado. Por isso, a tensão no capacitor e sua carga serão dependentes do tempo.

A corrente elétrica é definida em função do fluxo de cargas elétricas no tempo:

$$I = \frac{Q}{t} \rightarrow Q = I \cdot t \rightarrow q_{C1}(t) = \int i_{C1}(t) \cdot dt = I_1 \cdot t$$

Assim, a tensão resultante no capacitor será:

$$v_{C1}(t) = \frac{q_{C1}(t)}{C_1} = \frac{I_1 \cdot t}{C_1} = \frac{I_1}{C_1} \cdot t$$

Nota-se então que:

- A tensão no capacitor irá crescer linearmente no tempo;
- A razão de crescimento da tensão é dada pela relação entre a amplitude da corrente pela capacitância;
- O valor final da tensão no capacitor tende a infinito, na medida que o tempo tender a infinito.

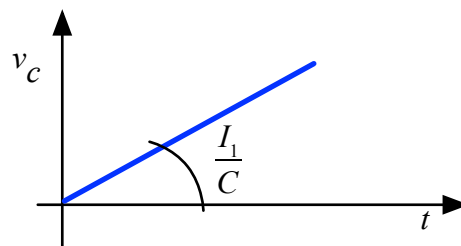


Figura 2 – Comportamento da tensão em um capacitor conectado em uma fonte de corrente.

Se o capacitor tiver uma carga inicial, então o comportamento da tensão será:

$$v_{C1}(t) = v_{C1}(t=0) + \frac{I_1}{C_1} \cdot t$$

$$v_{C1}(t) = v_{C1}(0) + \frac{I_1}{C_1} \cdot t$$

Considera-se zero o instante em que irá iniciar o transitório de carga no capacitor, ou seja, o tempo começa a decorrer quando se inicia a análise do circuito, considerando como condições iniciais o que transcorreu anteriormente.

Exemplo 1:

Um capacitor de $100\ \mu\text{F}$ é conectado em uma fonte de corrente de $100\ \text{mA}$. A carga inicial do capacitor é nula. Determine a tensão no capacitor após decorridos 1 segundo e 1 minuto.

A tensão no capacitor será:

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{I_1}{C} \cdot t = 0 + \frac{I_1}{C} \cdot t = \frac{I_1}{C} \cdot t$$

Assim, para 1 segundo e para 1 minuto se terá:

$$v_c(1s) = \frac{100m}{100\mu} \cdot 1 = 1000V = 1kV$$

$$v_c(1min) = \frac{100m}{100\mu} \cdot 1 \cdot 60 = 60000V = 60kV$$

2.3 Transitório de Carga de Capacitores com Fontes de Tensão

A Figura 2 mostra um circuito com um capacitor (C_1) conectado em uma fonte de tensão (V_1) por intermédio de um resistor em série (R_1) e uma chave liga-desliga (S_1). O resistor em série é necessário para se atender a Lei de Kirchhoff das Tensões, pois quando a chave S_1 for fechada, o capacitor estaria em paralelo com a fonte de alimentação, e os dois elementos teriam que ter, necessariamente, a mesma tensão. Assim, o resistor R_1 permite que a tensão no capacitor seja diferente da tensão da fonte de alimentação, além de limitar a corrente de carga, fazendo com que a corrente e tensão no circuito variem de maneira controlada no tempo.

As condições iniciais para a corrente e tensão no circuito serão consideradas nulas, e também se considera que a chave S_1 está aberta. Assim:

$$i_{C1}(0) = 0$$

$$v_{C1}(0) = 0$$

Note que o circuito em apenas uma malha, portanto, a corrente em todos os elementos será igual:

$$i_{V1}(0) = i_{S1}(0) = i_{R1}(0) = i_{C1}(t)$$

Assim, para fins de simplificação, a corrente do circuito será considerada aquela do

capacitor C_1 .

As variáveis do circuito (tensões e correntes) são dependentes do tempo, ou seja, podem variar ao longo do tempo; com exceção para a amplitude da fonte de tensão ($V_1 = \text{constante}$) e os valores do resistor e do capacitor ($R_1 = \text{constante}$ e $C_1 = \text{constante}$). A chave S_1 é considerada ideal, ou seja, não apresenta resistência interna, não influenciando no funcionamento do circuito.

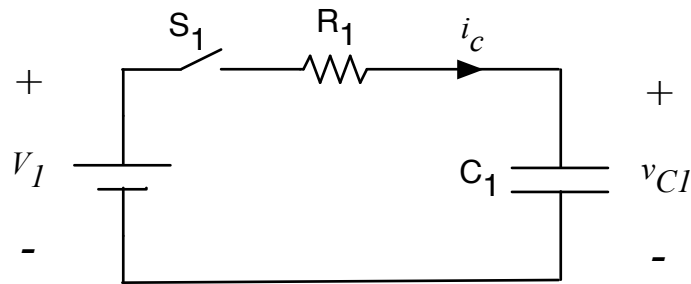


Figura 3 – Capacitor conectado em uma fonte de tensão.

No instante em que a chave S_1 for fechada, o circuito da Figura 3 será modificado conforme mostrado na Figura 4. Agora se tem corrente circulando no circuito, limitada pelo resistor R_1 , e o capacitor C_1 iniciará seu processo de carga.

A corrente de carga do capacitor C_1 deve ser determinada, do mesmo modo que sua tensão, além da tensão sobre o resistor R_1 .

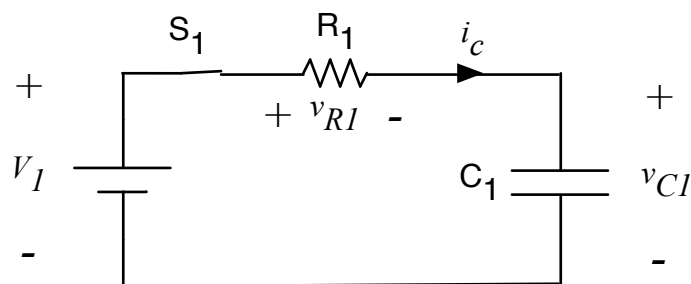


Figura 4 – Circuito equivalente com a chave S_1 fechada.

Como as correntes no resistor e no capacitor devem ser iguais, então:

$$i_{C1}(t) = i_{R1}(t)$$

A corrente no resistor pode ser obtida aplicando a Lei de Ohm no mesmo, levando em conta a tensão resultante sobre este componente:

$$i_{R1}(t) = \frac{v_{R1}(t)}{R_1} = \frac{V_1 - v_{C1}(t)}{R_1}$$

Assim:

$$i_{C1}(t) = \frac{V_1 - v_{C1}(t)}{R_1}$$

Já a tensão no capacitor, como mostrado no item anterior, é a relação entre sua carga acumulada ao longo do tempo e sua capacitância, assim:

$$v_{C1}(t) = \frac{q_{C1}(t)}{C_1}$$

$$q_{C1}(t) = \int i_{C1}(t) \cdot dt$$

$$v_{C1}(t) = \frac{q_{C1}(t)}{C_1} = \frac{\int i_{C1}(t) \cdot dt}{C_1} = \frac{1}{C_1} \cdot \int i_{C1}(t) \cdot dt$$

Por outro lado, a corrente no capacitor será:

$$i_{C1}(t) = C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$$

Substituindo na expressão da corrente obtida anteriormente:

$$i_{C1}(t) = \frac{V_1 - v_{C1}(t)}{R_1} = C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$$

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} + \frac{v_{C1}(t)}{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

A solução desta equação diferencial linear é:

$$v_{C1}(t) = V_1 - V_1 \cdot e^{-\frac{t}{R_1 \cdot C_1}}$$

O produto da resistência pela capacitância será denominado de constante de tempo do circuito e identificada pela letra τ (tal):

$$\tau = R_1 \cdot C_1$$

Assim:

$$v_{C1}(t) = V_1 - V_1 \cdot e^{-\frac{t}{R_1 \cdot C_1}} = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Por sua vez, a corrente no circuito pode ser obtida por:

$$i_{C1}(t) = i_{R1}(t) = \frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A corrente e a tensão no capacitor e no circuito tem o comportamento de uma função exponencial, conforme mostra a Figura 5, onde se nota que enquanto a tensão aumenta, a corrente diminui, restando ao final a corrente igual a zero e a tensão igual a da fonte de alimentação.

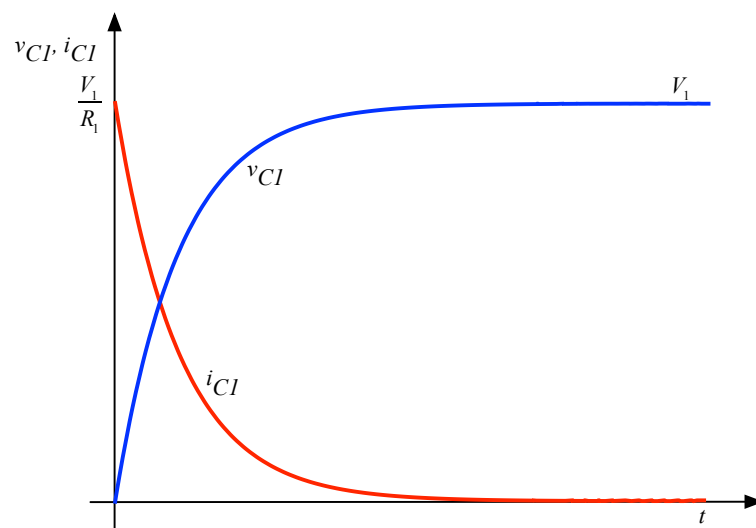


Figura 5 – Comportamento da corrente e tensão de carga do capacitor.

Da expressão obtida para corrente no capacitor, pode-se verificar que no instante de tempo zero, ou seja, exatamente quando a chave S_1 for fechada, a corrente será:

$$i_{C1}(t) = \frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow i_{C1}(t=0) = \frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{V_1}{R_1} \cdot 1 = \frac{V_1}{R_1}$$

Assim, a corrente máxima inicial é determinada pela relação entre a tensão da fonte de alimentação (V_1) e o resistor série (R_1).

Este resultado tem sentido, pois a tensão inicial no capacitor é zero, então:

$$v_{R1}(t=0) + v_{C1}(t=0) = V_1 \rightarrow v_{R1}(t=0) + 0 = V_1 \rightarrow v_{R1}(t=0) = V_1$$

Assim:

$$i_{R1}(t=0) = \frac{v_{R1}(t=0)}{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

Quando o tempo tender a infinito, a corrente no circuito será:

$$i_{C1}(t \rightarrow \infty) = \frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t \rightarrow \infty}{\tau}} = \frac{V_1}{R_1} \cdot 0 = 0$$

Note que os resultados obtidos para a corrente inicial e a corrente final, ou seja, a corrente no instante zero e a corrente para o tempo tendendo a infinito, são compatíveis com a curva mostrada na Figura 5.

Do mesmo modo, pode-se obter a tensão inicial e final no capacitor, como sendo:

$$v_{C1}(t) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \rightarrow v_{C1}(t=0) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = V_1 \cdot (1-1) = 0$$

$$v_{C1}(t) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \rightarrow v_{C1}(t \rightarrow \infty) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \rightarrow \infty}{\tau}}\right) = V_1 \cdot (1-0) = V_1$$

Vamos considerar agora que a tensão seja calculada para diferentes instantes de tempo. Assim, se na expressão da tensão no capacitor considerarmos o tempo com o valor de uma constante de tempo, teremos:

$$v_{C1}(t \rightarrow \tau) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \rightarrow \tau}{\tau}}\right) = V_1 \cdot (1 - e^{-1}) = V_1 \cdot (1 - 0,37) = 0,63 \cdot V_1$$

Assim, após transcorrer o tempo equivalente a uma constante de tempo ($t = 1\tau$), a tensão terá aumentado para 63% de seu valor final.

Ao considerarmos três e cinco constantes de tempo teremos:

$$v_{C1}(t \rightarrow 3\tau) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \rightarrow 3\tau}{\tau}}\right) = V_1 \cdot (1 - e^{-3}) = V_1 \cdot (1 - 0,05) = 0,95 \cdot V_1$$

$$v_{C1}(t \rightarrow 5\tau) = V_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t \rightarrow 5\tau}{\tau}}\right) = V_1 \cdot (1 - e^{-5}) = V_1 \cdot (1 - 0,0067) = 0,993 \cdot V_1$$

Assim, se considera que após cinco constantes de tempo, o transitório está concluído e o

circuito estará operando em regime permanente.

A Figura 6 mostra curva de carga da tensão no capacitor com os diversos pontos calculados anteriormente.

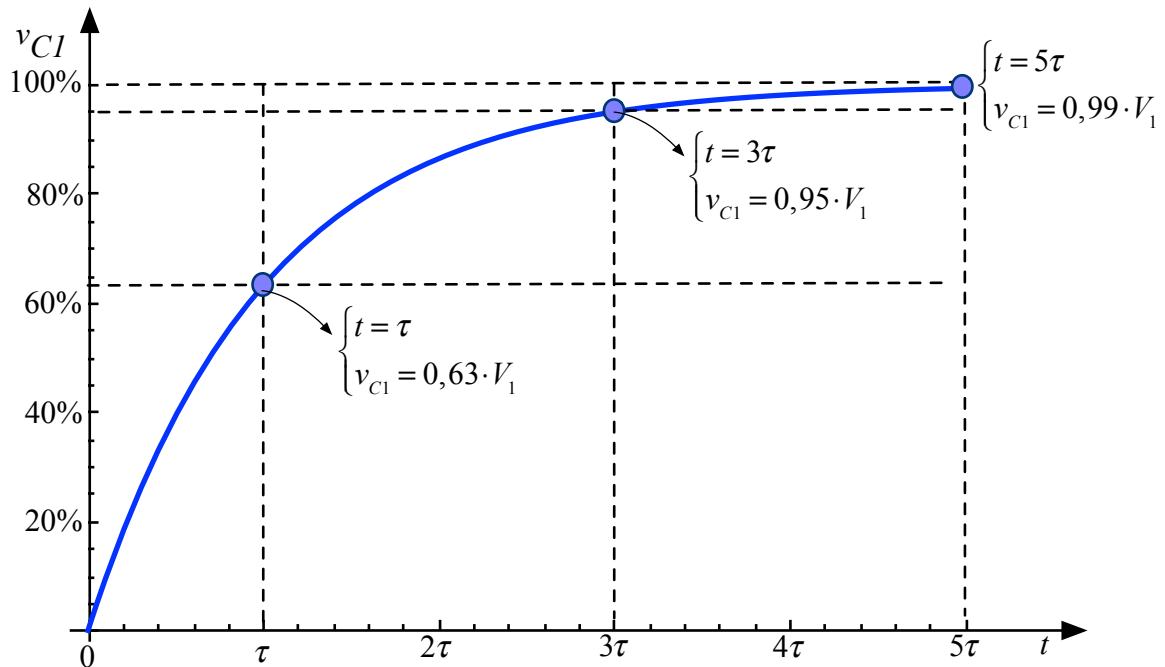


Figura 6 – Comportamento da tensão no capacitor durante sua carga.

Exemplo 2:

Um capacitor de $100 \mu\text{F}$ é conectado em uma fonte de tensão de 12 V por intermédio de um resistor de $1 \text{ k}\Omega$. Determine a constante de tempo do circuito e o tempo necessário para o capacitor carregar completamente.

A constante do circuito será:

$$\tau = R_1 \cdot C_1 = 1k \cdot 100\mu = 0,1s$$

O tempo para estar em regime permanente, ou seja, para o capacitor estar totalmente carregado é de cinco constante de tempo, então:

$$t = 5\tau = 5 \cdot R_1 \cdot C_1 = 5 \cdot 1k \cdot 100\mu = 0,5s$$

Exemplo 3:

Um capacitor de $1.000 \mu\text{F}$ é conectado em uma fonte de tensão de 12 V por intermédio de um resistor de $10 \text{ k}\Omega$. Determine a corrente máxima no circuito, a tensão final do capacitor e a tensão no instante 5 s .

A corrente máxima é a corrente inicial e será:

$$i_{C1}(t=0) = \frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t=0}{\tau}} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{12}{10k} = 1,2mA$$

A tensão final no capacitor é igual a da fonte de alimentação, ou seja, 12 V.

A tensão no instante 5 s será:

$$v_{C1}(t=5s) = 12 \cdot \left(1 - e^{-\frac{5}{10k \cdot 1000\mu}} \right) = 12 \cdot (1 - e^{-0,5}) = 4,72V$$

3 Transitório de Descarga de Capacitores

3.1 Introdução

A descarga de capacitores pode ser realizada transferindo-se a energia acumulada nos mesmos para resistores, por exemplo, ou para fontes de alimentação.

A seguir serão apresentados os processos de descarga de capacitores conectados em fontes de corrente ou resistores, este último caso sendo o mais comum na literatura de análise e circuitos.

3.2 Transitório de Descarga de Capacitores com Fontes de Corrente

A Figura 7 mostra um circuito com um capacitor (C_1) conectado em uma fonte de corrente (I_1) para prover a descarga do mesmo. Neste caso, a corrente do circuito e por conseguinte de descarga é imposta pela fonte de corrente, e a tensão do circuito será dada pelo estado de carga do capacitor. Assim:

$$i_{C1}(t) = I_1$$

$$v_{C1}(t) = v_1(t)$$

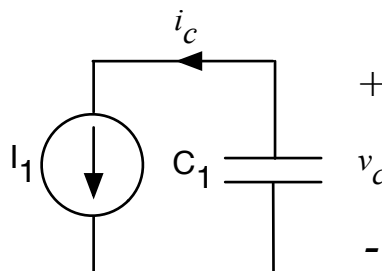


Figura 7 – Capacitor conectado em uma fonte de corrente.

As relações estudadas para a carga do capacitor são válidas aqui, com os devidos ajustes. Também deve-se considerar que agora o capacitor está carregado, ou seja, tem uma tensão inicial. Deste modo:

$$v_{C1}(0) \neq 0 \rightarrow v_{C1}(0) = v_c(\text{inicial})$$

Assim, a tensão resultante no capacitor será:

$$v_{C1}(t) = v_{C1}(t=0) - \frac{I_1}{C_1} \cdot t \rightarrow v_{C1}(t) = v_{C1}(0) - \frac{I_1}{C_1} \cdot t$$

Nota-se então que:

- A tensão no capacitor irá decrescer linearmente no tempo;
- A razão de decrescimento da tensão é dada pela relação entre a amplitude da corrente pela capacitância;
- O valor final da tensão no capacitor tende a infinito negativamente, na medida que o tempo tender a infinito.

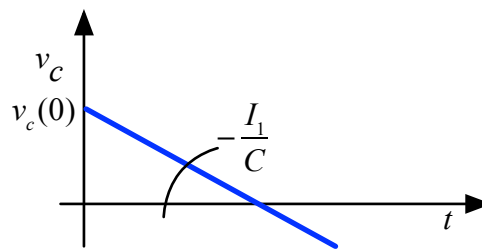


Figura 8 – Comportamento da tensão em um capacitor conectado em uma fonte de corrente.

Considera-se zero o instante em que irá iniciar o transitório de descarga no capacitor, ou seja, o tempo começa a decorrer quando se inicia a análise do circuito, considerando como condições iniciais o que transcorreu anteriormente para prover a carga no capacitor.

Exemplo 4:

Um capacitor de $100 \mu\text{F}$ é conectado em uma fonte de corrente de 100 mA . A carga inicial do capacitor é de 12 V . Determine o tempo necessário para o capacitor ser descarregado completamente.

O tempo necessário será obtido quando a tensão for zero, assim:

$$v_{C1}(t) = v_{C1}(0) - \frac{I_1}{C_1} \cdot t = 0 \rightarrow t = \frac{v_{C1}(0) \cdot C_1}{I_1} = \frac{12 \cdot 100 \mu}{100 \text{ m}} = 12 \text{ ms}$$

3.3 Transitório de Descarga de Capacitores Resistores

A Figura 9 mostra um circuito com um capacitor (C_1) conectado em uma fonte de tensão (V_1) por intermédio um resistor (R_1) e uma chave comutável (S_1). O resistor (R_1) juntamente com a fonte de alimentação (V_1) irão prover a carga do capacitor (C_1), quando a chave (S_1) estiver fechada na posição c (carrega). Por outro lado, quando a chave (S_1) estiver na posição d (descarrega), o resistor R_1 proverá a descarga do capacitor C_1 .

A carga do capacitor será realizada pelo tempo suficiente, com a chave na posição c (carrega), conforme o circuito mostrado na Figura 10. A tensão no capacitor será igual a tensão da fonte de alimentação, então:

$$v_{C1}(0) = V_1$$

Após carregado, a corrente no capacitor e no circuito será nula:

$$i_{C1}(0) = 0$$

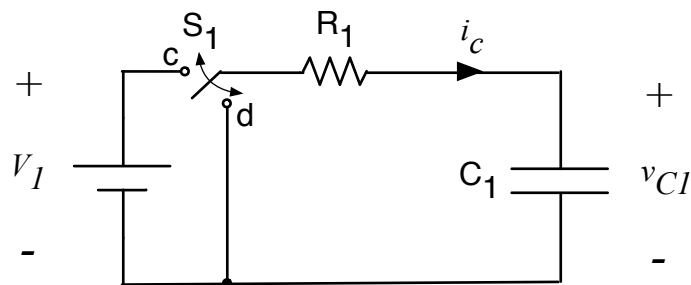


Figura 9 – Capacitor conectado em fonte de tensão e resistor.

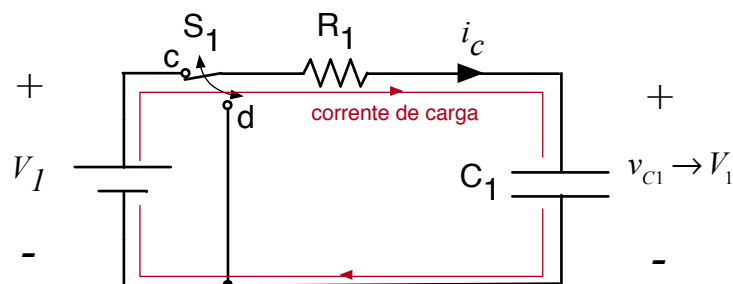


Figura 10 – Circuito equivalente com a chave S_1 na posição c (carrega).

Após decorrer tempo suficiente (com sobra) para a carga completa do capacitor, a chave S_1 será comutada para a posição d (descarrega), obtendo-se o circuito resultante mostrado na Figura 11. Note que a corrente de descarga tem sentido contrário ao da corrente de carga, isto é, a ao ocorrer a descarga do capacitor, a corrente sai do mesmo e circula pelo circuito.

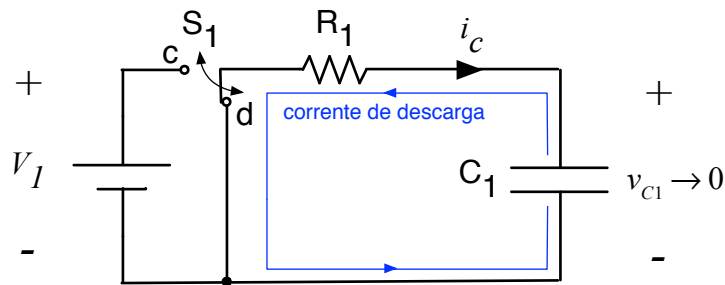


Figura 11 – Circuito equivalente com a chave S_1 na posição d (descarga).

Como as correntes no resistor e no capacitor devem ser iguais, então:

$$i_{C1}(t) = -i_{R1}(t)$$

As tensões no resistor e capacitor também são iguais, portanto:

$$v_{C1}(t) = v_{R1}(t)$$

A corrente no resistor pode ser obtida aplicando a Lei de Ohm no mesmo, levando em conta a tensão resultante sobre este componente e o sentido invertido da corrente:

$$i_{R1}(t) = \frac{v_{R1}(t)}{R_1} = \frac{v_{C1}(t)}{R_1}$$

Assim:

$$i_{C1}(t) = -i_{R1}(t) = -\frac{v_{C1}(t)}{R_1}$$

Já a tensão no capacitor, como mostrado no item anterior, é a relação entre sua carga acumulada ao longo do tempo e sua capacitância, conforme feito anteriormente, então:

$$v_{C1}(t) = \frac{q_{C1}(t)}{C_1}$$

$$q_{C1}(t) = \int i_{C1}(t) \cdot dt$$

$$v_{C1}(t) = \frac{q_{C1}(t)}{C_1} = \frac{\int i_{C1}(t) \cdot dt}{C_1} = \frac{1}{C_1} \cdot \int i_{C1}(t) \cdot dt$$

Por outro lado, a corrente no capacitor será:

$$i_{C1}(t) = C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt}$$

Substituindo na expressão da corrente obtida anteriormente:

$$i_{C1}(t) = -i_{R1}(t) \rightarrow C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} = -\frac{v_{C1}(t)}{R_1}$$

$$-C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} - \frac{v_{C1}(t)}{R_1} = 0 \rightarrow C_1 \cdot \frac{dv_{C1}(t)}{dt} + \frac{v_{C1}(t)}{R_1} = 0$$

A solução desta equação diferencial linear é:

$$v_{C1}(t) = V_1 \cdot e^{-\frac{t}{R_1 \cdot C_1}}$$

O produto da resistência pela capacitância, conforme no processo de carga, é denominado de constante de tempo do circuito e identificada pela letra τ (tal):

$$\tau = R_1 \cdot C_1$$

Assim:

$$v_{C1}(t) = V_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Por sua vez, a corrente no circuito pode ser obtida por:

$$i_{C1}(t) = i_{R1}(t) = -\frac{v_{R1}(t)}{R_1} = -\frac{v_{C1}(t)}{R_1} = -\frac{V_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_1} = -\frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A corrente e a tensão no capacitor e no circuito tem o comportamento de uma função exponencial, conforme mostra a Figura 12, onde se nota que tanto a tensão como a corrente terminam com valores nulos. A diferença é que a tensão começa com um valor positivo e cai até zero, enquanto a corrente começa negativa e cai até zero. Isso se dá porque a corrente de descarga do capacitor sai do mesmo, ou seja, é negativa em relação ao sentido convencional da corrente neste elemento.

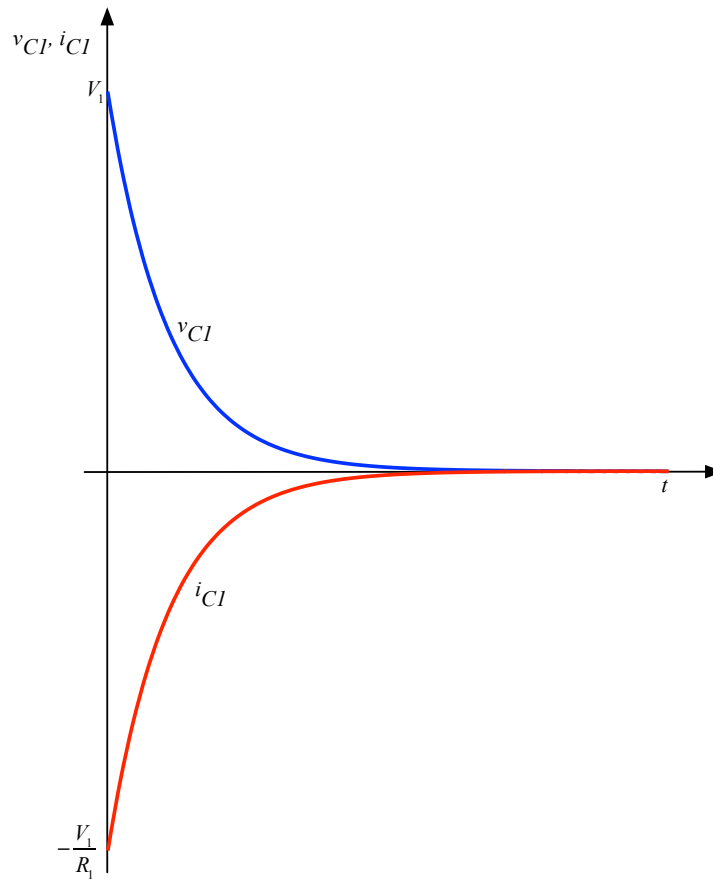


Figura 12 – Comportamento da corrente e tensão de descarga do capacitor.

A tensão inicial e final do capacitor podem ser calculadas por:

$$v_{C1}(t=0) = V_1 \cdot e^{-\frac{t=0}{\tau}} = V_1 \cdot e^{-0} = V_1 \cdot 1 = V_1$$

$$v_{C1}(t \rightarrow \infty) = V_1 \cdot e^{-\frac{t \rightarrow \infty}{\tau}} = V_1 \cdot e^{-\infty} = V_1 \cdot 0 = 0$$

Do mesmo modo, pode-se obter a corrente inicial e final no capacitor, como sendo:

$$i_{C1}(t=0) = -\frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t=0}{\tau}} = -\frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-0} = -\frac{V_1}{R_1}$$

$$i_{C1}(t \rightarrow \infty) = -\frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\frac{t \rightarrow \infty}{\tau}} = -\frac{V_1}{R_1} \cdot e^{-\infty} = -\frac{V_1}{R_1} \cdot 0 = 0$$

Vamos considerar agora que a tensão seja calculada para diferentes instantes de tempo do mesmo modo que foi feito no processo de carga do capacitor. Assim, se na expressão da tensão no capacitor considerarmos o tempo com o valor de uma constante de tempo, teremos:

$$v_{CI}(t \rightarrow \tau) = V_1 \cdot e^{-\frac{t \rightarrow \tau}{\tau}} = V_1 \cdot e^{-1} = 0,37 \cdot V_1$$

Assim, após transcorrer o tempo equivalente a uma constante de tempo ($t = 1\tau$), a tensão terá caído para 37% de seu valor inicial.

Ao considerarmos três e cinco constantes de tempo teremos:

$$v_{CI}(t \rightarrow 3\tau) = V_1 \cdot e^{-\frac{t \rightarrow 3\tau}{\tau}} = V_1 \cdot e^{-3} = 0,05 \cdot V_1$$

$$v_{CI}(t \rightarrow 5\tau) = V_1 \cdot e^{-\frac{t \rightarrow 5\tau}{\tau}} = V_1 \cdot e^{-5} = 0,0067 \cdot V_1 \cong 0$$

Assim, se considera que após cinco constantes de tempo, o transitório está concluído e o circuito estará operando em regime permanente.

A Figura 13 mostra curva de descarga da tensão no capacitor com os diversos pontos calculados anteriormente.

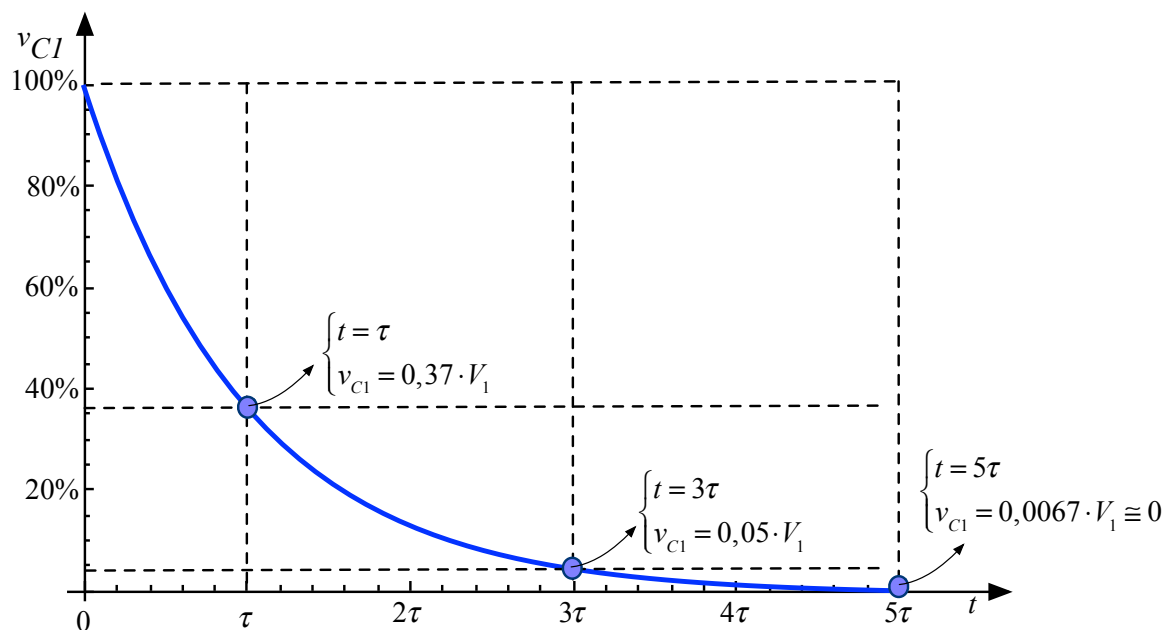


Figura 13 – Comportamento da tensão no capacitor durante sua descarga.

Exemplo 5:

Um capacitor de $2.200 \mu\text{F}$ foi conectado em uma fonte de tensão de 12 V por intermédio de um resistor de $1 \text{ k}\Omega$ e carregado completamente. Após muito tempo, o capacitor foi desconectado da fonte de alimentação e será descarregado pelo mesmo resistor. Determine a constante de tempo do circuito e o tempo necessário para o capacitor descarregar completamente.

A constante do circuito será:

$$t = R_1 \cdot C_1 = 1k \cdot 2200\mu = 2,2s$$

O tempo para estar em regime permanente, ou seja, para o capacitor estar totalmente descarregado é de cinco constante de tempo, então:

$$t = 5\tau = 5 \cdot R_1 \cdot C_1 = 5 \cdot 1k \cdot 2200\mu = 11s$$

Exemplo 6:

A tensão inicial de um capacitor de $1.000 \mu F$ é de $12 V$, sendo que o mesmo será descarregado por intermédio de um resistor de 100Ω . Determine a corrente máxima no circuito, a tensão final do capacitor e a tensão no instante $0,5 s$.

A corrente máxima é a corrente inicial e será:

$$i_{C1}(t=0) = -\frac{v_{C1}(t=0)}{R_1} = -\frac{12}{100} = -0,12 A$$

A tensão final no capacitor é igual a zero.

A tensão no instante $100 ms$ será:

$$v_{C1}(t=100ms) = v_{C1}(t=0) \cdot e^{-\frac{t \rightarrow 100m}{\tau}} = 12 \cdot e^{-\frac{100m}{100 \cdot 1000\mu}} = 12 \cdot e^{-1} = 4,41V$$

4 Energia Armazenada em Capacitores

4.1 Introdução

A aula anterior apresentou os capacitores, tipos e aspectos construtivos relacionados a estes componentes. Também se estudou como determinar a capacitância total em circuitos com capacitores em série ou em paralelo. Neste tópico será apresentado o cálculo da energia acumulada em um capacitor.

4.2 Energia Armazenada em Capacitores

A energia armazenada em capacitores dependerá de sua capacitância e da tensão aplicada.

A potência em um capacitor será o produto de sua tensão por sua corrente:

$$p_c(t) = v_c(t) \cdot i_c(t)$$

Note que as variáveis no capacitor são dependentes do tempo, ou seja, consideram-se os transitórios para a tensão e corrente no capacitor.

A energia é a potência ao longo do tempo, então integrando-se a expressão da potência no capacitor, se obterá:

$$W_c = \int p_c(t) = \int v_c(t) \cdot i_c(t)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_i^2$$

Onde:

- C – capacitância do capacitor;
- V_i – tensão armazenada no capacitor, geralmente igual a tensão da fonte de alimentação do circuito.

A energia acumulada no capacitor é área sob a curva da potência no mesmo, conforme mostra a Figura 14 para o transitório de carga.

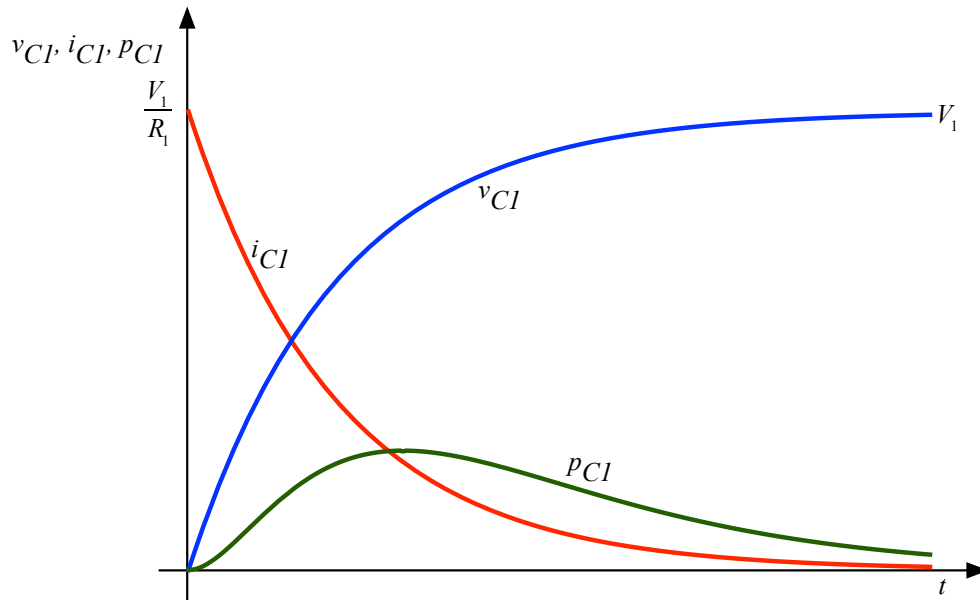


Figura 14 – Curvas das grandezas em um capacitor durante o transitório de carga.

Exemplo 7:

Um capacitor de $100 \mu\text{F}$ é carregado com uma tensão de 12 V . Qual a energia acumulada no capacitor após o mesmo estar completamente carregado?

Considerar o capacitor completamente carregado significa dizer que a tensão está

estabilizada no valor de 12 V, que é a tensão da fonte de alimentação. Assim, a energia armazenada será:

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 100\mu \cdot 12^2 = 7,2mJ$$

4.3 Variação da Energia Armazenada em Capacitores

A energia armazenada em capacitores pode variar conforme seu estado de carga. Assim, se um capacitor estiver carregado com determinada quantidade de cargas elétricas e for descarregado parcialmente, se terá uma energia inicial e uma energia final. Assim:

$$W_{c(i)} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_{c(i)}^2$$

$$W_{c(f)} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_{c(f)}^2$$

$$\Delta W_c = W_{c(f)} - W_{c(i)} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_{c(f)}^2 - \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_{c(i)}^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (V_{c(f)}^2 - V_{c(i)}^2)$$

Portanto, quando se tem variação na tensão de capacitores, pode-se calcular a energia levando em conta a tensão inicial e final neste elemento, tendo-se então:

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (V_f^2 - V_i^2)$$

Exemplo 8:

Um capacitor de 1.000 μF é carregado com uma tensão de 15 V, sendo em seguida descarregado parcialmente, ficando sua tensão em 14 V. Determine a energia inicial, final e a variação de energia no capacitor.

As energias inicial, final e variação são:

$$W_{c(i)} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\mu \cdot 15^2 = 0,1125J$$

$$W_{c(f)} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\mu \cdot 14^2 = 0,098J$$

$$\Delta W_c = W_{c(f)} - W_{c(i)} = 0,1125 - 0,098 = 0,0145J$$

5 Exercícios

Exercícios Resolvidos

ER 01. Explique o que é o transitório de carga de um capacitor?

Transitório de carga é o processo de carregar o capacitor com cargas elétricas, fazendo com que sua tensão aumente.

ER 02. Explique o que é o transitório de descarga de um capacitor?

Transitório de descarga é o processo de descarregar o capacitor, fazendo com que sua tensão diminua, retirando-se a energia armazenada no mesmo.

ER 03. Que parâmetros influenciam o tempo de carga de um capacitor?

O tempo de carga e descarga é dado pela constante de tempo, quando o mesmo é carregado com um resistor em série, este tempo é dado pelo produto da resistência vezes a capacitância.

ER 04. O que significa o tempo de 5 constantes de tempo durante o processo de carga de um capacitor?

Após cinco constantes de tempo considera-se que o capacitor está carregado completamente.

ER 05. Como pode ser descarregado um capacitor?

Um capacitor pode ser descarregado aplicando-se uma corrente negativa no mesmo ou ligando-se um resistor que dissipará a energia armazenada na forma de calor.

Exercícios Propostos

EP 01. Explique como é o formato da tensão em um capacitor carregado por uma fonte de corrente?

EP 02. Explique como é o formato da tensão em um capacitor carregado por uma fonte de tensão em série com um resistor?

EP 03. O que significa o tempo de 5 constantes de tempo durante o processo de descarga de um capacitor?

EP 04. Como um capacitor pode ser carregado?

EP 05. Qual a constante de tempo de um capacitor de $1.000 \mu\text{F}$ ligado em série com um resistor de $100 \text{ k}\Omega$?

6 Atividade Avaliativa

6.1 Introdução – O que preciso saber

Ao final deste objetivo de aprendizagem são apresentadas cinco questões, que devem ser respondidas sem consultar o material. Se você conseguir responder as questões e conferir as respostas com o gabarito abaixo, parabéns, você concluiu com êxito este tópico. Caso tenha errado alguma questão, revise o conteúdo relacionado com a mesma e refaça a questão, procurando se concentrar mais desta vez, para acertar a mesma e fixar bem o conteúdo.

AA 01. Qual a tensão final de um capacitor que será carregado em uma fonte de tensão de 12 V?

AA 02. Que parâmetros influenciam no tempo de descarga de um capacitor a ser descarregado sobre um resistor?

AA 03. Qual o formato da tensão de carga em um capacitor ligado em uma fonte de tensão em série com um resistor?

AA 04. Quantas constantes de tempo são necessárias para carregar ou descarregar um capacitor?

AA 05 Qual a constante de tempo de um capacitor de $4.700 \mu\text{F}$ ligado em série com um resistor de $330 \text{ k}\Omega$?

AA 01. A tensão final será igual a da fonte de alimentação, ou seja, 12 V.
AA 02. O tempo de descarga dependerá da resistência e da capacitância do circuito.
AA 03. O formato da tensão durante sua carga é de uma exponencial crescente, começando em zero e terminando na amplitude máxima, que é igual a tensão da fonte de alimentação.
AA 04. São necessárias cinco constantes de tempo para carregar ou descarregar completamente um capacitor.
AA 05. A constante de tempo será o produto da resistência pela capacitância: $4.700 \mu\text{F} \times 330 \text{ k}\Omega = 1.551 \text{ segundos ou } 25,85 \text{ minutos.}$